Polinomios

Sea $\Re$ el conjunto de los números reales.
Un polinomio f(x) con coeficientes en $\Re$ es una suma formal infinita.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i Id^i = a_0 + a_1 Id + \cdots + a_n Id^n + \cdots$$

Sea $$f = a_0 + a_1 Id + \cdots + a_n Id^n + \cdots$$

$$f(x) = a_0 + a_1 Id(x) + \cdots + a_n Id^n(x) + \cdots$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Donde $a_i \in \Re$ y $a_i = 0$ para todos, excepto un numero finito de valores de i.

Las a_i son los coeficientes de f(x). Si para alguna $i > 0$ es cierto que $i \neq 0$,
El mayor de dichos valores de i es el grado de f(x) . De no existir dicho $i > 0$
, entonces f(x) es de grado cero.

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ tiene $a_i = 0$ para $i > n$, entonces

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Si alguna $a_i = 1$, se puede quitar de la suma formal, así que se considerara, por ejemplo:

$2 + 1x = 2 + x$ con coeficientes en Z.

Pues 1 es el elemento neutro en $\Re$ $\forall a \in \Re$

Esto es $a \bullet 1 = a$

Por otra parte es posible omitir de la suma formal cualquier término de la forma
$0x^i$ o $a_0 = 0$, si $a_0 = 0$, pero no todos los $a_i = 0$. ¿Por qué?

Ejemplo:

$$f(x) = a_0 + a_1 Id(x) + \cdots + a_n Id^n(x) + \cdots$$

En donde $a_1 = 0$ y $a_3 = 0$ reemplazando tenemos:

$$f(x) = a_0 + 0 \bullet Id(x) + \cdots + 0 \bullet Id^3(x) + a_n Id^n(x) + \cdots$$

Aquí no se puede omitir $a_1 = 0$ y $a_3 = 0$

Pues

$$0 \bullet x \neq x \quad \text{y} \quad 0 \bullet x^3 \neq x^3$$

Así $0, 2, x$ y $2 + x^2$ son polinomios con coeficientes en Z, también tenemos :

$$f(x) = 2$$
$$g(x) = x$$
$$t(x) = x^3 + 2x$$
$$m(x) = \pi$$
$$r(x) = x^8 + x^3 + 5$$

Son todos polinomios con coeficientes en $\Re$

Suma de polinomios

La suma de polinomios con coeficientes en R esta definido de la manera que le es formalmente conocida. Si

$$f(x) = a_0 + a_1 Id(x) + \cdots + a_n Id^n(x) + \cdots$$

Y

$$g(x) = a_0 + a_1 Id(x) + \cdots + a_n Id^n(x) + \cdots$$

Entonces f(x)+g(x) será.

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1 Id(x) + \cdots + c_n Id^n(x) + \cdots$$

Donde $c_n = a_n + b_n$

Por otra parte también tenemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i Id^i(x) = f(x)$$

y

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i Id^i(x) = g(x)$$

$$\therefore\ f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Id^i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i Id^i(x) = g(x)$$

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i Id^i(x)+b_i Id^i(x)$$
$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} (a_i+b_i) Id^i(x)$$

De donde

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i=\sum_{i=0}^{\infty} a_i+\sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

$$\therefore\ f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i Id^i(x)$$

Lo cual será.

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1 Id(x)+\cdots+c_n Id^n(x)+\cdots$$

Donde $c_i \in \Re$ y $c_i=0$ para todos, excepto un numero finito de valores de i.

Multiplicación de polinomios

Sea:

$$f(x) = a_0 + a_1 Id(x) + \cdots + a_n Id^n(x) + \cdots$$

Y

$$g(x) = a_0 + a_1 Id(x) + \cdots + a_n Id^n(x) + \cdots$$

Entonces

$$f(x) \bullet g(x) = d_0 + d_1 Id(x) + \cdots + d_n Id^n(x) + \cdots$$

Donde $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}$ por conmutatividad en R.

Donde $d_i \in \Re$ y $d_i = 0$ para todos, excepto un numero finito de valores de i.

Ejemplo:

$$d_1 = \sum_{i=0}^{1} a_i b_{1-i} = a_0 b_{1-0} + a_1 b_{1-1} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

Por otro lado.

$$d_1 = \sum_{i=0}^{1} b_i a_{1-i} = b_0 a_{1-0} + b_1 a_{1-1} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$ Por la conmutatividad en R

Por tener estas propiedades se dice que la terna $(R[x], +, \bullet)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad.

El anillo de los Polinomios $R[x]$

Al conjunto de todos los polinomios en una indeterminada x con coeficientes reales se le nota por $R[x]$. En dicho conjunto ya se han definido las operaciones de **suma** y **producto**.

Propiedades que cumple la **adicción de polinomios**.

Asociatividad: $((p(x)+q(x))+r(x) = p(x)+((q(x)+r(x))$

Conmutatividad: $p(x)+q(x) = q(x)+ p(x)$

Elemento Neutro: Es el polinomio q(x)=0, pues
$$p(x)+q(x) = p(x)+0 = p(x) = 0+ p(x) = q(x)+ p(x)$$

Elemento Simétrico: el elemento simétrico de p(x) es –p(x), pues
$$p(x)+(-p(x)) = 0 = -p(x)+ p(x)$$

Propiedades que cumple la **multiplicación de polinomios.**

Asociatividad: $((p(x)\bullet q(x))\bullet r(x) = p(x)\bullet((q(x)\bullet r(x))$

Conmutatividad: $p(x)\bullet q(x) = q(x)\bullet p(x)$

Elemento Neutro: Es el polinomio q(x)=1, pues
$$p(x)\bullet q(x) = p(x)\bullet 1 = p(x) = 1\bullet p(x) = q(x)\bullet p(x)$$

Polinomios en el Aritmética, Algebra, Estadística, Geometría y en la Geometría Analítica.

Sean los polinomios

$p(x) = 2$

$q(x) = 2 + x$

$r(x) = 2x$

$s(x) = 3x^2$

$t(x) = 6x^2 + 2x$

$v(x) = x^8$

$w(x) = x^5 + 9x^3 + 1$

Calcule:

$1.-\ p(x) + q(x) \bullet v(x)$
$2.-\ s(x) \bullet r(x)$
$3.-\ w(x) + t(x) + p(x) \bullet t(x)$

Después calcule:

1.- $p(5) =$

2.- $q(21) =$

3.- $r(-3) =$

4.- $s(7) =$

5.- $t(-12) =$

6.- $v(1) =$

7.- $w(0) =$

Luego con los valores obtenidos:
Calcule las medidas de centralización.

Ejemplo: Media Aritmética , Moda , etc…

Sea $y = 3x^2$ e $y = 2 + x$ Grafique y encuentre si es posible intercepciones (si existen)

Luego veremos las graficas independientes del eje de coordenadas , por ejemplo como trabajar con una recta en que partes de la geometría esta presente , así de la misma manera con los otros tipos de curvas que podemos graficar.

La finalidad con estos ejercicios es que el alumno trabaje entrelazando sus conocimientos.