Lógica matemática

Adrián Domingo Giménez- adrian_domingo_gimenez@hotmail.com

1. Las tablas de verdad
2. Las leyes de la lógica enunciativa
3. Tautologías y contradicciones
4. La paridad lógica
5. Leyes de la lógica de predicados
6. Reglas de inferencia
7. La demostración lógica

$\neg$	No	$\gg$	Mucho mayor que
$\wedge$	Conjunción lógica ("y")	$\nless$	No es menor que
$\vee$	Disyunción lógica ("o")	$\ngtr$	No es mayor que
$\Rightarrow$	Implicador o condicional	$\nleq$	No es menor o igual que
$\Leftrightarrow$	Coimplicador ("si y sólo si")	$\ngeq$	No es mayor o igual que
$\bigwedge_x n$	Para todo *x* se verifica *n*	$\equiv$	Equivale a, es idéntico a
$\bigvee_x n$	Existe algún *x* que verifica *n*	$\not\equiv$	No equivale a, no es idéntico a
$:=$	Igual por definición	$\vdash$	Produce
$:\Leftrightarrow$	Equivalente por definición	$\dashv$	No produce
$\sqsupset, >$	Mayor que	V, 1	Verdadero
$\sqsubset, <$	Menor que	F, 0	Falso
$\sqsupseteq, \geq$	Mayor o igual que	?	Desconocido
$\sqsubseteq, \leq$	Menor o igual que	$\therefore$	Por tanto, entonces
$\ll$	Mucho menor que	$\blacksquare$,	Queda demostrado

Las tablas de verdad.

Existen unas leyes lógicas de gran importancia a partir de las cuales podemos analizar y resolver los problemas ante los que nos hallemos:

a) Lógica del opuesto:

Sean dos elementos, *p* y *q*, tales que *p* es el opuesto de *q*. Si $q = \neg p$, entonces,

P	¬p
1	0
0	1

Un ejemplo cotidiano sería: *si voy al parque* ($p = 1$); *no voy al parque es falso* ($\neg p = 0$).

NOTA: ciertos autores, en vez de poner 1 y 0 para determinar el estado lógico de un elemento, proposición,… (que indican, como ya se ha explicado, verdadero o falso), prefieren poner V y F, respectivamente. Se corresponde, pues:

$$V = 1 \qquad F = 0$$

b) Lógica del conjuntor:

Sean *p* y *q* dos elementos cualesquiera; entonces, $p \wedge q$ será:

P	q	p ∧ q
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	0

De manera que la lógica del conjuntor afirma que a no ser que todos elementos sean verdaderos, el enunciado es falso. Nótese que $p \neq \neg q$, o, si se prefiere, $q \neq \neg p$.

Ejemplo: *sea* p *el enunciado* $yo\ como$ *y* q, $yo\ almuerzo$*; entonces tenemos:*

1. *Si yo como y almuerzo,* $p \wedge q$ *es V*
2. *Si yo como y no almuerzo,* $p \wedge q$ *es F*
3. *Si yo no como y almuerzo,* $p \wedge q$ *es F*
4. *Si yo no como y no almuerzo,* $p \wedge q$ *es F*

Normalmente, aparecen más de dos elementos. Nótese que $q \neq \neg p$.

c) Lógica del disyuntor:

Sean *p* y *q* dos elementos cualesquiera tales que $q \neq \neg p$; entonces, $p \vee q$ será:

P	**q**	**p ∨ q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Es decir, la lógica del disyuntor nos dice que a no ser que todos los elementos sean falsos, el enunciado es verdadero.

Ejemplo: *sea* p *el enunciado* $yo\ como$ *y* q, $yo\ almuerzo$*; entonces tenemos:*

1. *Si yo como o almuerzo,* $p \wedge q$ *es V porque ambos elementos son ciertos.*
2. *Si yo como o no almuerzo,* $p \wedge q$ *es V porque un enunciado es cierto.*
3. *Si yo no como y almuerzo,* $p \wedge q$ *es V porque un enunciado es cierto.*
4. *Si yo no como y no almuerzo,* $p \wedge q$ *es F porque no hay enunciado verdadero alguno.*

d) Lógica de la condicional:

Sean *p* y *q* dos elementos tales que *p* produce o implica *q*; es decir, $p \rightarrow q$. Entonces;

p	**q**	**p→q**
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Es decir, si el antecedente (p) es V y la consecuencia (q) es F, entonces, $p \rightarrow q$ será F; por el contrario, una condición F puede implicar cualquier consecuencia, tanto V como F. Con un ejemplo lo veremos más claro:

Ejemplo: *sea* p *el enunciado* $yo\ hago\ deporte$ *y* q, $se\ me\ acelera\ el\ pulso$*. Entonces;*

1. *Si hago deporte, se me acelera el pulso:* $p = V \ \wedge q = V;\ \ p \rightarrow q = V$
2. *Si hago deporte, no se me acelera el pulso:* $p = V \ \wedge \ q = F; p \rightarrow q = F$
3. *Si no hago deporte, se me acelera el pulso:* $p = F \ \wedge q = V; p \rightarrow q = V$*. (Es verdadero porque el pulso se me puede acelerar debido a otra causa, por ejemplo, que me haya dado un susto).*
4. *Si no hago deporte, no se me acelera el pulso:* $p = F \ \wedge q = F; p \rightarrow q = V$*. (Es una forma distinta de decir lo anterior:* ***la negación de la negación es la afirmación;*** $\neg(\neg \mathbf{p}) = \mathbf{p}$**,** como tenemos un no (¬) tanto en el antecedente como en la consecuencia, es como si no los tuviéramos, de manera que estamos diciendo lo mismo que en el apartado 1: "*si ~~no~~ hago deporte, ~~no~~ se me acelera el pulso*").

e) Lógica del coimplicador:

Sean *p* y *q* dos elementos tales que *p* implica *q* y *q* implica *p*:

$$\boxed{p \rightarrow q \ \wedge q \rightarrow p \ \Rightarrow \ p \leftrightarrow q}$$

Así nace el coimplicador $\leftrightarrow$, que denota bicondicionalidad. He aquí la tabla de lógica coimplicatoria:

P	q	p $\leftrightarrow$ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Lo que dice el antecedente (p) es una condición absolutamente necesaria para que ocurra lo que dice el consecuente (q). Si *p* y *q* son verdaderos, está claro que $p \leftrightarrow q$ será también cierto. Cuando ambos elementos son falsos, $p \leftrightarrow q$ será cierto por el principio de la ***afirmación como negación negada***: $\neg(\neg p) = \neg\neg p = p \rightarrow V = \neg(\neg F)$.

Ejemplo de negación negada: "*no voy a no comprar eso*" es lo mismo que "*voy a comprar eso*"

Ejemplo de lógica coimplicatoria*: Iré al parque si y sólo si hago los deberes.*
Observamos que $p = \textit{iré al parque}$ *y* $q = \textit{haré los deberes}$*:*

1. *Iré al parque si y sólo si hago los deberes: V (*$p = V, q = V;\ p \leftrightarrow q = V$*)*
2. *Iré al parque si y sólo si no hago los deberes: F* *(*$p = V, q = F; p \leftrightarrow q = F$*)*
3. *No iré al parque si y sólo si hago los deberes: F (*$p = F, q = V;\ p \leftrightarrow q = F$*)*
4. *No iré al parque si y sólo si no hago los deberes: V (*$p = F, q = F; p \leftrightarrow q = V$*)*

Ejemplo: *halla el valor de verdad de la expresión* $(p \rightarrow q \wedge p) \rightarrow p$.
Está claro que $[(p \rightarrow p \wedge q) \rightarrow p] = V \vee F$*. Hallamos su tabla de verdad:*

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$(p \rightarrow p \wedge q) \rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Como en las casillas inferiores a la expresión que estamos buscando, $(p \rightarrow q \wedge p) \rightarrow p$*, sale V en todas ellas, entonces* ***el valor de verdad es V***:
$(p \rightarrow p \wedge q) \rightarrow p = V$

NOTA: no se confunda el operador V con el valor de verdad V.

Las leyes de la lógica enunciativa.

Constituyen las formas enunciativas universalmente válidas. Son muy importantes en matemáticas porque a partir de ellas resultan las **reglas de inferencia**, que sirven para pasar de enunciados verdaderos (V) a nuevos enunciados verdaderos. Las leyes más importantes de la lógica enunciativa son:

a) Ley del tercio excluido:
Es la ya nombrada lógica del opuesto: si *p* es V, entonces ¬*p* es F. Se llama *"ley del tercio excluido"* porque un elemento *p* puede tener tres posibilidades: **V, F** o **?**. Si es V, no puede ser F; si es F, no puede ser V; de manera que excluimos un tercio de posibilidades:

$$\boxed{p \vee \neg p}$$

b) Ley de la contradicción:
Por extensión del anterior, podemos afirmar que no puede ocurrir a la vez que *p* sea V y F:

$$\boxed{\neg(p \wedge \neg p)}$$

c) Ley de la negación negada (o negación doble):

Es muy usado en el lenguaje cotidiano; responde al ya nombrado principio de "la negación de la negación es la afirmación":

$$\boxed{\neg(\neg p) \leftrightarrow p}$$

d) Ley Dual de De Morgan:

La Primera Ley de De Morgan afirma que negamos el conjunto de elementos *p*, *q*,… relacionados por el conjuntor ($\wedge$) si y sólo si se cumple ¬*p* o ¬*q*:

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

La Segunda Ley de De Morgan afirma que negamos el conjunto de elementos *p, q,…* relacionados por el disyuntor lógico ($\vee$) si y sólo si *p* y *q* son negados:

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

e) Leyes del modus:

Las llamadas *leyes del modus* son bastante sencillas. A continuación se detallan:

1. Ley del modus ponens:

   Afirma que si se verifican p y $p \rightarrow q$, se puede deducir q. Por ello, también se denomina Ley de Separación:

$$\boxed{(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q}$$

2. Ley del modus tollens:

   Por extensión de la Ley de Separación, podemos caer en cuenta de que si se verifican $\neg q$ y $p \rightarrow q$, se puede deducir $\neg p$:

$$\boxed{(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q}$$

   "Si como, almuerzo; si no almuerzo, no como" (Nótese que si no como, no necesariamente no almuerzo, de manera que no siempre sería cierto el enunciado $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ *).*

3. Ley del modus barbara:

   En realidad esta ley es una regla de inferencia (permite pasar de enunciados V a nuevos enunciados V) en cadena, ya que sostiene que si se verifican $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

   "Si me caigo, me hago daño, y si me hago daño, lloro; por lo tanto, si me caigo, lloro".

f) Primera y Segunda Ley distributiva:

1. Primera Ley distributiva:

   Afirma la siguiente obviedad:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

   "Si como y (almuerzo o ceno); entonces bien (como y almuerzo) o bien (como y ceno)".

2. Segunda Ley distributiva:

   Por extensión de la Primera Ley distributiva, deducimos que

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

   "Si como o almuerzo y ceno, entonces como o almuerzo y como o ceno".

g) Leyes de Idempotencia:

1. Ley de Idempotencia Conjuntiva:

   Sea el elemento *p* y el operador $\wedge$; se llama Ley de Idempotencia conjuntiva a la expresión

$$p \wedge p \leftrightarrow p$$

   "Si me voy a comprar y me voy a comprar; me voy a comprar" (Nótese que esta ley lógica es de uso cotidiano en nuestras vidas: si le preguntan que ha hecho hoy y ha hecho poco, tenderá a repetir elementos –he ido a por el pan, a la peluquería, a clase, me he leido un

libro, he ido a comprar pan para comer…– si bien con que se diga una vez basta, como afirma esta ley).

2. Ley de Idempotencia Disyuntiva
Sea el elemento *p* y el operador $\vee$; se llama Ley de Idempotencia Disyuntiva a la tautología:

$$\boxed{p \vee p \leftrightarrow p}$$

“O estudia o estudia” es lo mismo que decir “estudia”.

En efecto, $p = p$; entonces, de ambas leyes obtenemos $p \wedge p = p \vee p$. Por tanto, la Ley de Idempotencia Trascendida afirma que

$$\boxed{p \wedge p \leftrightarrow p \vee p}$$

NOTA: nótese que en lógica se suele usar el operador $\leftrightarrow$ en sustitución del operador $=$.

h) Leyes de Absorción:

1. Ley de Absorción Conjuntodisyuntiva:
Sean los elementos *p* y *q*; se cumple

$$\boxed{p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p}$$

2. Ley de Absorción Disyuntoconjuntiva:
Sean los elementos p y q; se verifica
$\boxed{p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p}$

De la unificación de ambas leyes, alcanzamos la Ley de Absorción Generalizada:

$$\boxed{p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p \vee (p \wedge q)}$$

Tautologías y contradicciones.

Tautología: se dice de la proposición que es cierta para todo valor de verdad de sus variables, por ejemplo:
$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

En efecto, **ley** es lo mismo que tautología, de manera que todas las leyes anteriores bien las podemos denominar como tautologías. Constituyen la base de la demostración lógica.

Contradicciones: se dice de la proposición que siempre resulta falsa sea cual fuere el valor de verdad de sus variables, por ejemplo:
$p \wedge \neg p$

Para saber si una proposición pudiera ser una tautología o una falacia, desarrollamos su tabla de la verdad.

La paridad lógica.

Dos proposiciones lógicas son **equivalentes** si y sólo si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Por ejemplo, sea la proposición lógica $p \wedge q \rightarrow r \vee s$ denotada por a y sea también esta otra, $\neg\big(\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)\big)$, denotada por b; obsérvese que $\neg(\neg a) \leftrightarrow b$; dado que $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$; entonces tenemos $\neg(\neg a) \leftrightarrow a$, y por tanto **las proposiciones a y b son equivalentes:**

$$\boldsymbol{a \equiv b}$$

Leyes de la lógica de predicados.

Son necesarias para llevar a cabo la formalización de teorías matemáticas, pues es fácil percatarse de que no es suficiente con la lógica de enunciados, ya que en un enunciado nos encontramos, habitualmente, con tres entes lógicas: **sujetos**, **predicados** y **partículas cuantificadoras**.
Las partículas cuantificadoras más importantes son dos: $\bigwedge_x$ y $\bigvee_x$.
$\bigwedge_x n$ equivale a "se verifica *n* para todo *x*"; $\bigvee_x n$ equivale a "existe algún *x* que verifica *n*".

Ejemplo*: escribe en lenguaje lógico "existe algún número primo entre 1 y 4".*
En efecto, tendremos que usar $\bigvee_x n$. A continuación, tomamos, por ejemplo, la letra *p* para el predicado "es un nº primo". Denotamos por *x* al conjunto de los números naturales existentes entre 1 y 4 (porque el/los número/s primos que buscamos están entre 1 y 4, por lo que pertenecen a $\mathbb{N}$).
Entonces, podemos escribirlo así:

$$\bigvee_x (x \in \mathbb{N} \wedge p(x) \wedge 1 < x < 4)$$

Ejemplo: *escribe en lenguaje lógico "la adición de* p *y* q *es igual a* r *en todo el conjunto real".*
Si denotamos por $\Sigma(r, p, q)$ *que* $p + q = r$*; tenemos*

$$\bigwedge_p \bigwedge_q \bigvee_r \left(p \in \mathbb{R} \wedge q \in \mathbb{R} \wedge r \in \mathbb{R} \wedge \Sigma(r, p, q)\right)$$

(Nótese que en el primer ejemplo, el predicado es **monario,** p(x), ya que sólo tenemos un sujeto, *x*; sin embargo, en el segundo ejemplo, el predicado es **ternario**, $\Sigma(r, p, q)$, ya que tenemos tres sujetos, *r*, *p* y *q*.

1.1.1 <u>Leyes de la negación:</u>

Hay cuatro leyes; muy sencillas. Son las siguientes:

a) "No para todo *x* se verifica p(x) si y sólo si existe algún *x* que no verifica p(x)":

$$\boxed{\neg \bigwedge_x p(x) \leftrightarrow \bigvee_x \neg p(x)}$$

b) "Si decimos que no existe algún *x* que verifique p(x), estamos diciendo que para ningún *x* se cumple p(x)":

$$\boxed{\neg \bigvee_x p(x) \leftrightarrow \neg \bigwedge_x p(x)}$$

c) "No para todo *x* no se cumple p(x) es lo mismo que decir que existe algún *x* que verifica p(x)":

$$\boxed{\neg \bigwedge_x \neg p(x) \leftrightarrow \bigvee_x p(x)}$$

d) "Si no existe algún *x* que no verifique p(x), entonces todo *x* verifica p(x)":

$$\boxed{\neg \bigvee_x \neg p(x) \leftrightarrow \bigwedge_x p(x)}$$

1.1.2 <u>Leyes de la conmutación:</u>

Sea un predicado binario p(x, y); se cumplirán las siguientes leyes conmutativas:

$$a) \quad \bigwedge_x \bigwedge_y p(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x p(x, y)$$

$$b) \quad \bigvee_x \bigvee_y p(x, y) \leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x p(x, y)$$

$$c) \quad \bigwedge_x \bigvee_y p(x, y) \rightarrow \bigvee_y \bigwedge_x p(x, y)$$

$$d) \quad \bigvee_{x} \bigwedge_{y} p(x,y) \rightarrow \bigwedge_{y} \bigvee_{x} p(x,y)$$

En efecto, las leyes de la conmutación son extrapolables a predicados *n*-arios.

Ejemplo: *sea un predicado ternario* p(x,y,z); *hallar la ley conmutativa cuando ese predicado se cumple para todo* x*, para todo* y *y para todo* z.

$$\bigwedge_{x}\bigwedge_{y}\bigwedge_{z} p(x,y,z) \leftrightarrow \bigwedge_{x}\bigwedge_{z}\bigwedge_{y} p(x,y,z) \leftrightarrow \bigwedge_{y}\bigwedge_{x}\bigwedge_{z} p(x,y,z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{y}\bigwedge_{z}\bigwedge_{x} p(x,y,z) \leftrightarrow \bigwedge_{z}\bigwedge_{x}\bigwedge_{y} p(x,y,z) \leftrightarrow \bigwedge_{z}\bigwedge_{y}\bigwedge_{x} p(x,y,z)$$

Reglas de inferencia.

Las **reglas de inferencia**, ya mencionadas anteriormente grosso modo, son aquellos argumentos basados en tautologías que simbolizan formas de razonamiento universalmente correctos. Nos ayudarán a aunar varias hipótesis y varias tautologías durante una **demostración**.

Existe una lista de reglas de inferencia, si bien no se expone, pues radican en las leyes lógicas ya expuestas. A la hora de demostrar, su uso es frecuente.

La demostración lógica.

La demostración lógica consiste en derivar un enunciado a partir de otros enunciados siguiendo unas reglas de inferencia lógica determinadas.
En Matemáticas, no todos los enunciados son demostrables ya que nos encontramos ante sentencias que no derivan de alguna otra; de esta manera nacen los **axiomas**.
Entendemos por **axioma** el enunciado supuesto como cierto (V) a los que recurrimos en las demostraciones. Una vez establecidos los axiomas, tenemos varios métodos de demostración, a usar según convenga:

1.1.3 Demostración directa.

Sea $a \rightarrow b$ una tautología tal que $a \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ y $b \equiv q$, de manera que podemos escribir, entonces,

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q,$$

que, en efecto, también es una tautología. Por su condición de tautología, la implicación será verdadera sea cual fuere el valor de verdad de sus variables.
Así pues, el método de demostración directa radica en: **si se conoce el valor de verdad de las variables de la proposición a, y éste es V, entonces b también será verdadera:**
$(\textbf{Valor de verdad } (a) = \textbf{V siempre}) \rightarrow (b = \textbf{V siempre})$

Nótese que se trata de demostrar que b es verdadera si a lo es, y no que b es verdadera.

1.1.4 Demostración por contradicción.

El objetivo consiste en alcanzar una contradicción. La metodología de la demostración es parecida a la demostración directa; la única diferencia consiste en incluir una línea con la negación de la conclusión, $\neg b$.

1.1.5 Demostración por inducción.

Esta modalidad de demostración lógica permite demostrar la validez de diversos tipos de proposiciones formuladas en términos de **una variable**, p. Por lo general, $p \in \mathbb{N}$.

Sea p cualquier propiedad de los números del conjunto natural, $\mathbb{N}$. Conjetúrense dos principios:

-Primero: La propiedad p es aceptada por el número cero (la tiene).
-Segundo: Si cualquier x natural tiene p, entonces su sucesor (sea $s(x)$) también la tiene.

Si se cumplen estos dos principios, tenemos que **todo *x* natural tiene *ρ*:**

$$p(0) \wedge \bigwedge_x (x \in \mathbb{N} \wedge p(x) \rightarrow p[s(x)]); \quad \therefore \quad \boxed{\bigwedge_x (x \in \mathbb{N} \wedge p(x))}$$

LÓGICA. **APLICACIÓN TEÓRICO-PRÁCTICA**

1. Usando tablas de verdad, demuestre que $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$.
2. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \wedge \neg p \leftrightarrow 0$.
3. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \wedge p \leftrightarrow p \vee p$.
4. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$.
5. Usando tabas de verdad, demuestre que $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$.
6. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \wedge (q \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$.
7. Usando tablas de verdad, demuestre que $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$.
8. Usando tablas de verdad, demuestre que $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$.
9. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.
10. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
11. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$.
12. Demuestre que la expresión lógica $p \rightarrow \neg(p \vee r)$ es una contradicción si el valor de verdad de p es 1.
13. Demuestre que la expresión $\neg p \leftrightarrow p$ es una contradicción.
14. Sabiendo que $p = 1$, halle el valor de verdad de la implicación $q \wedge s \rightarrow p \vee r$.
15. Sabiendo que $p = 1$, halle el valor de verdad de la proposición $\neg(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$.
16. Formalice la expresión *he visto la película de El nombre de la rosa, si bien no me he leído la novela.*
17. Formalice la expresión *no se si a la lluvia que está cayendo le acompaña nieve o granizo.*
18. Formalice la expresión *si no hay calima, mañana saldré a dar una vuelta con mis amigos por la tarde.*
19. Formalice la expresión *la lógica es algo complicada pero agiliza la mente.*

20. Formalice la expresión *si Roberto vota a la derecha en las próximas elecciones generales, el candidato a Presidente de la República del Partido "La Derecha" tendrá más posibilidades de gobernar.*

21. Formalice la expresión *viajaremos en tren, en avión o en coche.*

22. Formalice la expresión *si EEUU impone sanciones comerciales a la China, las relaciones entre ambos países se verán gravemente afectadas; si bien no será motivo de guerra.*

23. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow q \\ \hline \end{array}$$

24. Realice la operación

$$\begin{array}{c} \neg p \rightarrow \neg q \\ \neg p \\ \hline \end{array}$$

25. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ \neg q \\ \hline \end{array}$$

26. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \leftrightarrow r \vee s \\ r \\ \hline \end{array}$$

27. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \\ \hline \end{array}$$

28. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \vee s \\ s \rightarrow \neg q \\ \neg r \\ \hline \end{array}$$

29. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ q \vee r \\ p \rightarrow \neg s \\ s \\ \hline \end{array}$$

30. Realice la operación

$$\begin{array}{c} p \wedge \neg q \\ \neg r \rightarrow \neg q \\ \neg(\neg r) \vee s \\ s \wedge p \rightarrow t \end{array}$$

31. Escriba en lenguaje lógico *existen números reales comprendidos entre los reales 2 y 4.*

32. Escriba en lenguaje lógico *no para todo x se verifica p(x) es lo mismo que decir que existe algún x que no verifica p(x).*

33. Escriba en lenguaje lógico *la adición de los naturales 1 y 2 es 3.*

34. Demuestre que

$$\neg\left(\neg\left(\neg\left(\neg\bigwedge_x p(x)\right)\right)\right)\leftrightarrow\neg\left(\bigvee_x \neg p(x)\right)$$

35. Sea un predicado *n*-ario $p(a,b,c,\dots,\omega)$ con $n=5$. Halle la ley conmutativa cuando ese predicado se cumple para todos los elementos $a,b,c,\dots,\omega$.

36. Halle cuál de las dos proposiciones siguientes es una tautología y cuál una contradicción:
a) $p\vee\neg p$
b) $\neg(\neg p)\wedge\neg p$

37. Usando la tabla de verdad, demuestre que $p\vee(p\wedge q)\leftrightarrow p$.

38. Demuestre, a través del método que convenga, la expresión: *si trabajo y ahorro parte del dinero que he conseguido trabajando, me compraré una vivienda, en la cual podré guardad mi automóvil. Por ello, si no puedo guardar el coche en mi vivienda, quiere decir que no ahorro.*

39. Exponga un ejemplo de proposición (con su significado, es decir, traducida al lenguaje habitual) cuyo valor de verdad no sea ni cierto ni falso.

40. Halle, y preste mucha atención, el valor de verdad de la expresión: *ahora mismo estoy mintiendo.* ¿Qué observa?

LÓGICA. **SOLUCIONARIO**

1. Usando tablas de verdad, demuestre que $\neg(\neg p)\leftrightarrow p$.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$\neg(\neg p)\leftrightarrow p$
1	0	1	**1**
0	1	0	**1**

Observamos que la expresión $\neg(\neg p)\leftrightarrow p$ se cumple ya sea p 1 o 0; por tanto, es una tautología.

2. Usando tablas de verdad, demuestre que $p\wedge\neg p\leftrightarrow 0$.

p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$
1	0	**0**
0	1	**0**

Observamos que la proposición $p\wedge\neg p$ resulta falsa ya sea p 1 o 0; por tanto, su valor de verdad siempre es 0 (es una proposición contradicción)

3. Usando tablas de verdad, demuestre que $p\wedge p\leftrightarrow p\vee p$.

p	$p\wedge p$	$p\vee p$	$p\wedge p\leftrightarrow p\vee p$

1	1	1	**1**
0	0	0	**1**

Observamos que la expresión $p \wedge p \leftrightarrow p \vee p$ se cumple ya sea p 1 o 0; por tanto, es una tautología. Obsérvese que esta demostración radica en la regla de inferencia de la idempotencia: la ley de idempotencia conjuntiva afirma que $p \wedge p \leftrightarrow p$ y la ley de idempotencia disyuntiva afirma que $p \vee p \leftrightarrow p$; dado que $p \leftrightarrow p$ (es fácilmente demostrable); tenemos que $p \wedge p \leftrightarrow p \vee p$.

4. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \to q) \wedge p \to q$.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	0	**1**

Observamos que la implicación $(p \to q) \wedge p \to q$ se cumple sea cual sea el valor de verdad de los elementos de la proposición; por consiguiente, es una tautología.

5. Usando tabas de verdad, demuestre que $(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg p$	$(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$
1	1	0	0	1	0	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	1	1	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**

Observamos que la implicación $(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$ se cumple sea cual sea el valor de verdad de los elementos involucrados; es una tautología.

6. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \wedge (q \wedge \neg q) \to \neg p$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \wedge (q \wedge \neg q)$	$p \wedge (q \wedge \neg q) \to \neg p$
1	1	0	0	0	0	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	0	0	**1**

Observamos que la implicación $p \wedge (q \wedge \neg q) \to \neg p$ se cumple sea cual sea el valor de verdad de los elementos involucrados; es una tautología.

7. Usando tablas de verdad, demuestre que $[(p \to q) \to p] \to p$.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$[(p \to q) \to p] \to p$
1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	0	**1**

Observamos que la implicación $[(p \to q) \to p] \to p$ se cumple sea cual sea el valor de verdad de los elementos involucrados; es una tautología.

8. Usando tablas de verdad, demuestre que $(\neg p \wedge \neg q) \to (p \leftrightarrow q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \wedge \neg q) \to (p \leftrightarrow q)$
1	1	0	0	0	1	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**

0	1	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**

Observamos que la implicación $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$. se cumple sea cual sea el valor de verdad de los elementos involucrados; es una tautología.

9. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r$
1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	1	**1**
1	0	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	1	0	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	1	1	1	**1**
0	0	1	0	1	1	1	**1**
0	0	0	0	0	0	0	**1**

Observamos que la coimplicación $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ se cumple sea cual sea el valor de verdad de los elementos involucrados; es una tautología.

10. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee$
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	1	1	**1**
1	0	1	0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	0	0	1	0	0	**1**
0	0	1	0	0	0	1	0	**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**

Observamos que la coimplicación $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ resulta cierta (obtenemos 1 en todas las casillas de la tabla de verdad) ya sean los elementos interventores ciertos o falsos.

11. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$.

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \vee q) \wedge$
1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	0	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	0	0	
0	0	1	0	1	0	1	0	
0	0	0	0	1	0	1	0	

Observamos que la implicación $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$ resulta acertada (obtenemos 1) sea cual sea el valor de verdad de p, q y r (siempre que no sea ?, lógicamente).

12. Demuestre que la expresión lógica $p \rightarrow \neg(p \vee r)$ es una contradicción si el valor de verdad de p es 1.

p	r	$p \vee r$	$\neg(p \vee r)$	$p \rightarrow \neg(p \vee r)$
1	1	1	0	**0**

1	0	1	0	**0**

13.Demuestre que la expresión $\neg p \leftrightarrow p$ es una contradicción.

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
1	0	**0**
0	1	**0**

14.Sabiendo que $p = 1$, halle el valor de verdad de la implicación $q \wedge s \rightarrow p \vee r$.

p	q	r	s	$q \wedge s$	$p \vee r$	$q \wedge s \rightarrow p \vee r$
1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	1	0	0	1	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	1	0	1	**1**
1	0	1	0	0	1	**1**
1	0	0	1	0	1	**1**
1	0	0	0	0	1	**1**

Observamos que si el valor de verdad de p es 1, entonces la implicación resulta cierta sea cual sea el valor de las demás variables. Por tanto, si $p = 1$, entonces $q \wedge s \rightarrow p \vee r$ es una tautología.

15.Sabiendo que $p = 1$, halle el valor de verdad de la proposición $\neg(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \rightarrow r$	$\neg(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	0	1	**0**
1	1	0	1	0	0	**0**
1	0	1	1	0	1	**0**
1	0	0	1	0	0	**0**

Por consiguiente, la proposición $\neg(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$ es una contradicción si el valor de verdad del elemento p es 1 (verdadero).

16.Formalice la expresión *he visto la película de El nombre de la rosa, si bien no me he leído la novela.*

$He\ visto\ la\ película\ de\ El\ nombre\ de\ la\ rosa \rightarrow p$

$Me\ he\ leído\ la\ novela\ de\ el\ nombre\ de\ la\ rosa \rightarrow q$

Nótese que el lo mismo decir "he visto la película de el nombre de la rosa, si bien no me he leído la novela" que "he visto la película de El nombre de la rosa y no me he leído la novela de El nombre de la rosa":

$p \wedge \neg q$

17.Formalice la expresión *no se si a la lluvia que está cayendo le acompaña nieve o granizo.*

$La\ lluvia\ que\ está\ cayendo \rightarrow p$

$Le\ acompaña\ nieve\ (a\ la\ lluvia\ que\ está\ cayendo) \rightarrow q$

$Le\ acompaña\ granizo\ (a\ la\ lluvia\ que\ está\ cayendo) \rightarrow r$

Nótese que el enunciado es equivalente a este otro: "está lloviendo y o bien nieva o graniza":

$p \wedge (q \vee r)$

18.Formalice la expresión *si no hay calima, mañana saldré a dar una vuelta con mis amigos por la tarde.*

$Hay\ calima \rightarrow p$

$Saldré\ a\ dar\ una\ vuelta\ con\ mis\ amigos \rightarrow q$

$$\neg p \rightarrow q$$

19.Formalice la expresión *la lógica es algo complicada pero nos ayuda a agilizar la mente.*

$La\ lógica\ es\ algo\ complicado \rightarrow p$

$Nos\ ayuda\ a\ agilizar\ la\ mente \rightarrow q$

El enunciado anterior es lo mismo que decir "la lógica nos ayuda a agilizar la mente", es decir, "si estudias lógica, lograrás agilizar tu mente":

$Estudiar\ lógica\ \rightarrow p$

$Lograr\ agilizar\ la\ mente\ \rightarrow q$

$p \rightarrow q$

20.Formalice la expresión *si Roberto vota a la derecha en las próximas elecciones generales, el candidato a Presidente del País por la derecha tendrá más posibilidades de gobernar.*

$Roberto\ vota\ a\ la\ derecha\ en\ las\ próximas\ elecciones\ generales \rightarrow p$

$El\ candidato\ a\ Presidente\ del\ País\ por\ la\ derecha\ tendrá\ más\ posibilidades\ de\ gobernar \rightarrow q$

$$p \rightarrow q$$

21.Formalice la expresión *viajaremos en tren, en avión o en coche.*

$Viajaremos\ en\ tren \rightarrow p$

$Viajaremos\ en\ avión \rightarrow q$

$Viajaremos\ en\ cohe \rightarrow r$

$p \vee (q \vee r) = r \vee (p \vee q) = q \vee (p \vee r)$

22.Formalice la expresión *si EEUU impone sanciones comerciales a la China, las relaciones entre ambos países se verán gravemente afectadas; si bien no será motivo de guerra.*

$EEUU\ impone\ sanciones\ comerciales\ a\ la\ China\ \rightarrow p$

$Las\ relaciones\ entre\ ambos\ países\ se\ verán\ gravemente\ afectadas\ \rightarrow q$

$Será\ motivo\ de\ guerra\ \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$

23.Realice la operación $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow q \\ \hline \end{array}$

(Para hacer este tipo de operaciones, conviene traducir los elementos existentes por enunciados cotidianos; más tarde, con la práctica, esto ya no será necesario).

Observamos que $p \rightarrow q$ *y que* $r \rightarrow q$*; por consiguiente;* $p \wedge r \rightarrow q$*.*

Por tanto,

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow q \\ \hline \vdash p \wedge r \rightarrow q \end{array}$$

24.Realice la operación $\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg q \\ \neg p \end{array}$

(*Este ejemplo es algo más complicado: sea* $p = no\ hay\ parques\ para\ animales\ domésticos$
$q = hacen\ sus\ necesidades\ en\ la\ vía\ pública$

Entonces, $\neg p \rightarrow \neg q$ *significa "si hay parques para animales domésticos, no hacen sus necesidades en la vía pública. Entonces,* $\neg p . > \neg q$*; por tanto,*

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg q \\ \neg p \\ \hline \vdash \neg q \end{array}$$

25.Realice la operación $\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \neg q \end{array}$

Si p y q están unidas por el coimplicador y esa proposición, $p \leftrightarrow q$ *es cierta, entonces la proposición* $\neg p \rightarrow \neg q$ *también será cierta:*

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \neg q \\ \hline \vdash \neg p \end{array}$$

26.Realice la operación $\begin{array}{c} p \to q \\ p \leftrightarrow r \vee s \\ r \end{array}$

(A partir del presente ejercicio, se da la solución directamente; no obstante, conviene traducir los elementos al lenguaje cotidiano para ver más claramente la solución).

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \leftrightarrow r \vee s \\ r \\ \hline \vdash q \end{array}$$

27.Realice la operación $\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ p \end{array}$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ p \\ \hline \vdash r \end{array}$$

28.Realice la operación $\begin{array}{c} p \to q \\ r \vee s \\ s \to \neg q \\ \neg r \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \vee s \\ s \to \neg q \\ \neg r \\ \hline \vdash \neg p \end{array}$$

29.Realice la operación $\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ q \vee r \\ p \to \neg s \\ s \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \vee r \\ p \to \neg s \\ s \\ \hline \vdash r \end{array}$$

30.Realice la operación $\begin{array}{c} p \wedge \neg q \\ \neg r \to \neg q \\ \neg(\neg r) \vee s \\ s \wedge p \to t \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{l} p \wedge \neg q \\ r \to q \\ r \vee s \\ s \wedge p \to t \\ \hline \vdash t \end{array}$$

31.Escriba en lenguaje lógico *existen números reales comprendidos entre los reales 2 y 4.*

$$\bigvee_{x} (x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 4)$$

32.Escriba en lenguaje lógico *no para todo x se verifica p(x) es lo mismo que decir que existe algún x que no verifica p(x).*

$$\neg \bigwedge_{x} p(x) \leftrightarrow \bigvee_{x} \neg p(x)$$

33.Escriba en lenguaje lógico *la adición de los naturales 1 y 2 es 3.*

$1 + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad p = 1 \wedge q = 2 \wedge z = 3; p + q = z;\ \Sigma(z, p, q)$

$$\bigwedge_{p} \bigwedge_{q} \bigwedge_{z} (p = 1 \wedge q = 2 \wedge z = 3 \wedge \Sigma(z, p, q))$$

$$\bigwedge_{p} \bigwedge_{q} \bigwedge_{z} \left(p \leftrightarrow 1 \wedge q \leftrightarrow 2 \wedge z \leftrightarrow 3 \wedge \Sigma(z, p, q)\right)$$

34. Demuestre que

$$\neg\left(\neg\left(\neg\left(\neg \bigwedge_{x} p(x)\right)\right)\right) \leftrightarrow \neg\left(\bigvee_{x} \neg p(x)\right)$$

Al ser una coimplicación, es posible quitar negaciones de ambos lados:

$$\cancel{\neg}\left(\neg\left(\neg\left(\neg \bigwedge_{x} p(x)\right)\right)\right) \leftrightarrow \cancel{\neg}\left(\bigvee_{x} \neg p(x)\right)$$

$$\neg\left(\neg\left(\neg \bigwedge_{x} p(x)\right)\right) \leftrightarrow \bigvee_{x} \neg p(x)$$

Dado que $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$*, podemos eliminar dos negaciones de la primera proposición:*

$$\cancel{\neg}\left(\cancel{\neg}\left(\neg \bigwedge_{x} p(x)\right)\right) \leftrightarrow \bigvee_{x} \neg p(x)$$

Por tanto,

$$\neg \bigvee_{x} p(x) \leftrightarrow \bigwedge_{x} \neg p(x)$$

Obsérvese que la coimplicación anterior es la Primera Ley de la negación lógica, de manera que la demostración se simplifica (simplemente decimos que es la primera ley de la negación; también es posible llegar al final de la demostración si se desea).

35.Sea un predicado *n*-ario $p(a, b, c, \dots, \omega)$ con $n = 5$. Halle la ley conmutativa cuando ese predicado se cumple para todos los elementos $a, b, c, \dots, \omega$.

Dado que $n = 5$, $p(a, b, c, \dots, \omega) = p(a, b, c, d, e)$;

$$\bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{e} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{e}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c}\bigwedge_{e} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{e} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{e}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b}\bigwedge_{e} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{a}\bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{a}\bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{a}\bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_d \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_d \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_d p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_d \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_b \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_d \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_e \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_a \bigwedge_c p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_c \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_a \bigwedge_e \bigwedge_b p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_a \bigwedge_e p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_d \bigwedge_c \bigwedge_b \bigwedge_e \bigwedge_a p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{d}\bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{a}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{d}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a}\bigwedge_{d} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{c}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a}\bigwedge_{c} p(a,b,c,d,e) =$$

$$= \bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{b}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c}\bigwedge_{a}\bigwedge_{b} p(a,b,c,d,e) = \bigwedge_{e}\bigwedge_{d}\bigwedge_{c}\bigwedge_{b}\bigwedge_{a} p(a,b,c,d,e)$$

36. Halle cuál de las dos proposiciones siguientes es una tautología y cuál una contradicción:

$a)\ p \vee \neg p$

$b)\ \neg(\neg p) \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	**1**	**0**
0	1	**1**	**0**

Nótese que a) es la tautología y b) la contradicción.

37. Usando la tabla de verdad, demuestre que $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge$
1	1	1	**1**
1	0	0	**1**
0	1	0	0
0	0	0	0

38. Demuestre, a través del método que convenga, si es cierta la expresión: *si trabajo y ahorro parte del dinero que he conseguido trabajando, me compraré una vivienda, en la cual podré guardad mi automóvil. Por ello, si no puedo guardar el coche en mi vivienda, quiere decir que no ahorro.*

$Trabajo \rightarrow p$

$Ahorro\ parte\ del\ dinero\ que\ he\ conseguido\ trabajando \rightarrow q$

$Me\ compraré\ una\ vivienda\ donde\ guardaré\ el\ cohe \rightarrow r$

$No\ puedo\ guardar\ el\ cohe\ en\ mi\ vivienda \rightarrow s$

$No\ ahorro \rightarrow \neg q$

$p \wedge q \rightarrow r$

$s \rightarrow \neg q$

Haciendo las tablas de verdad, se obtiene que si el estado lógico de los elementos p, q, r *es 1, entonces se verifica* $p \wedge q \rightarrow r$*; es decir, todas las condiciones han de ser ciertas. Asimismo, si en* $s \rightarrow \neg q$ *se tiene*

s	q	$\neg q$	$s \rightarrow \neg q$
1	1	0	0
1	0	1	1

0	1	0	1
0	0	1	1

Por tanto, dado que para que se verifique todo el enunciado ha de ser todo cierto, se tiene:

$p \wedge q \rightarrow r$	$s \rightarrow \neg q$	$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge (s \rightarrow \neg q)$
1	***0***	***0***
0	***1***	***0***
1	***1***	***1***
1	***1***	***1***
1	***1***	***1***

Nótese pues que la frase inicial no es siempre cierta: puede ser que sí que ahorre, pero que por otras circunstancias ocultas no haya podido comprarme una casa; o que se haya roto el coche y esté en el taller,…

39. Exponga un ejemplo de proposición (con su significado, es decir, traducida al lenguaje habitual) cuyo valor de verdad no sea ni cierto ni falso.
En el año 2038 el meteorito Apophis colisionará con el planeta Tierra.

40. Halle, y preste mucha atención, el valor de verdad de la expresión: *ahora mismo estoy mintiendo.* ¿Qué observa?
En la expresión 'ahora mismo estoy mintiendo' el análisis lógico es muy complicado, ya que si se dice que se está mintiendo, entonces en esa frase también se está mintiendo, por lo que, en realidad, no está mintiendo, siendo pues su estado lógico el 1.
Sin embargo, si está mintiendo en ese momento, quiere decir que no está diciendo la verdad, y, por tanto, el estado lógico sería el 0.

Autor:
Adrián Domingo Giménez
adrian_domingo_gimenez@hotmail.com