

Tautología y contradicciones

Tautología y contradicción.

Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la contrapositiva cuya tabla de verdad se indica a continuación.

p	Q	p'	Q'	$p \rightarrow q$	$q' \rightarrow p'$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q' \rightarrow p')$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Note que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre 1. Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

A continuación se cita una lista de las tautologías más conocidas y reglas de inferencia de mayor uso en las demostraciones formales:

1.- Doble negación.

a). $p'' \leftrightarrow p$

2.- Leyes conmutativas.

a). $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

$$b). (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$c). (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

3.- Leyes asociativas.

$$a). [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$b). [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

4.- Leyes distributivas.

$$a). [p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$b). [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

5.- Leyes de idempotencia.

$$a). (p \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$b). (p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

6.- Leyes de Morgan

$$a). (p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$$

$$b). (p \wedge q)' \Leftrightarrow (p' \vee q')$$

$$c). (p \vee q) \Leftrightarrow (p' \wedge q)'$$

$$b). (p \wedge q) \Leftrightarrow (p' \vee q)'$$

7.- Contrapositiva.

$$a). (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \rightarrow p')$$

8.- Implicación.

a). $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$

b). $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q)'$

c). $(p \vee q) \Leftrightarrow (p' \rightarrow q)$

d). $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)'$

e). $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

f). $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$

9.- Equivalencia

a). $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

10.- Adición.

a). $p \Rightarrow (p \vee q)$

11.- Simplificación.

a). $(p \wedge q) \Rightarrow p$

12.- Absurdo

a). $(p \rightarrow 0) \Rightarrow p'$

13.- Modus ponens.

a). $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$

14.- Modus tollens.

$$a). [(p \rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$$

15.- Transitividad del \leftrightarrow

$$a). [(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

16.- Transitividad del \rightarrow

$$a). [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

17.- Mas implicaciones lógicas.

$$a). (p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$$

$$b). (p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$$

$$c). (p \rightarrow q) \Rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

18.- Dilemas constructivos.

$$a). [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$$

$$b). [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$$

Contradicción es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las mas usadas y mas sencilla es $p \wedge p'$. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	P'	$P \wedge p'$
0	1	0
1	0	0

Si en el ejemplo anterior

p : La puerta es verde.

La proposición $p \wedge p'$ equivale a decir que "La puerta es verde y la puerta no es verde". Por lo tanto se esta contradiciendo o se dice que es una falacia.

Una proposición compuesta cuyos resultados en sus deferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado 1s y 0s se le llama contingente.