

Elementi di teoria degli insiemi

Liberamente adattato da:

Cristante, Lis e Sambin (1984). Aspetti quantitativi in psicologia. Fondamenti teorici per i metodi statistici. Liviana, Padova.

Psicometria 1 - Lezione 3

Lucidi presentati a lezione

AA 2000/2001 dott. Corrado Caudek

Intuitivamente, il concetto di insieme può essere considerato come un qualunque aggregato o classe ben definita di oggetti, persone, osservazioni.

Di solito gli insiemi vengono denotati dalle lettere maiuscole dell'alfabeto $A, B, C, X\dots$

Gli oggetti, persone, osservazioni che appartengono ad un insieme si chiamano *elementi* dell'insieme.

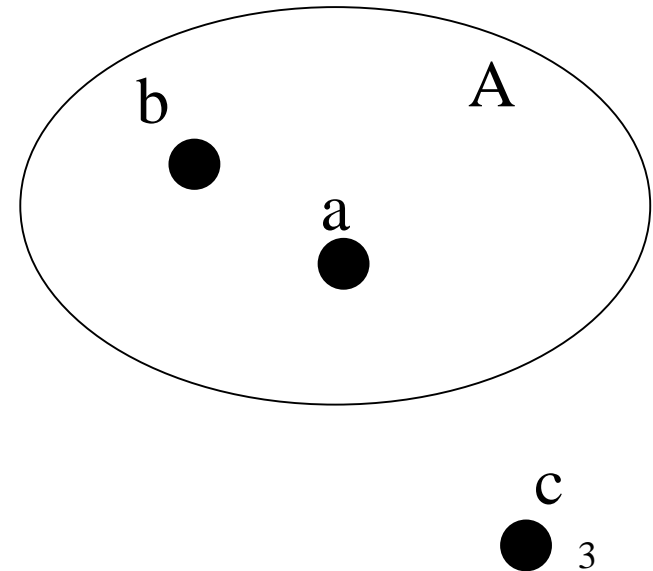
Se gli elementi dell'insieme A sono a_1, a_2, a_3 , allora scriviamo

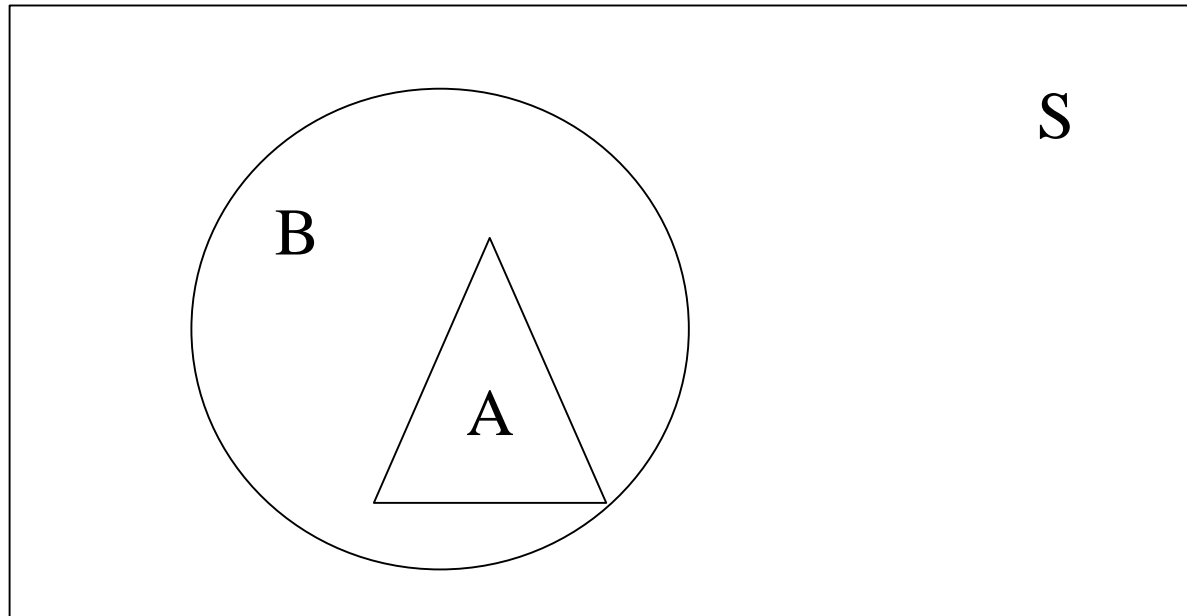
$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

Lo studio degli insiemi viene facilitato dalla loro rappresentazione mediante grafici chiamati **diagrammi di Venn**.

Gli elementi dell'insieme vengono indicati da punti situati internamente a qualunque linea chiusa.

L'insieme A contiene gli elementi a e b , ma non l'elemento c .





L'insieme A è costituito da tutti i punti contenuti nel triangolo.

L'insieme B è costituito da tutti i punti contenuti nel cerchio.

La definizione di un insieme può avvenire in due modi:

(1) ***estensionalmente***: elencando tutti gli elementi in esso contenuti

$A = \{\text{Carlo, Francesca, Paola}\}$

(2) ***intensionalmente***: mediante una regola che consenta di stabilire le condizioni a cui deve soddisfare un elemento per appartenere o meno all'insieme. Questa regola viene detta *proprietà caratteristica* dell'insieme.

$A = \{x/ x \text{ ha gli occhiali}\}$

INSIEME VUOTO

Si chiama insieme vuoto ogni insieme che non contenga alcun elemento. Viene indicato con il simbolo \emptyset .

Esempio.

Sia A l'insieme delle giornate già trascorse in cui il sole non è sorto. Poiché fino ad oggi il sole è sorto ogni giorno, A è vuoto: $A = \emptyset$

INSIEMI UGUALI

Due insiemi A e B si dicono uguali se ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B e viceversa.

Se due sistemi sono uguali si scrive $A = B$.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 1, 2\}$$

$$A = B$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 2, 3\}$$

$$A = B$$

SOTTOINSIEMI

Un insieme B si dice **sottoinsieme** di A se ogni elemento di B appartiene ad A .

Si scrive

$$B \subseteq A$$

Un insieme B si dice **sottoinsieme proprio** di A se B è un sottoinsieme di A e se esiste almeno un elemento di A che non è contenuto in B .

$$B \subset A$$

ALCUNE PROPRIETA' DELL'INCLUSIONE

L'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualsiasi insieme.

Ogni insieme A è un sottoinsieme di se stesso

Dati due insiemi A e B , se A è incluso in B e B è incluso in A allora A e B sono insiemi uguali.

Esempio.

L'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ ha i seguenti sottoinsiemi:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\},$

$\{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$

INSIEME UNIVERSO

Si chiama insieme universo un insieme rispetto al quale tutti gli insiemi presi in considerazione si possono considerare come sottoinsiemi.

Esempio. L'insieme degli esseri viventi può venire considerato come insieme universo rispetto alle classificazioni delle scienze naturali come piante, animali, vertebrati, mammiferi, lupi....

OPERAZIONI TRA INSIEMI

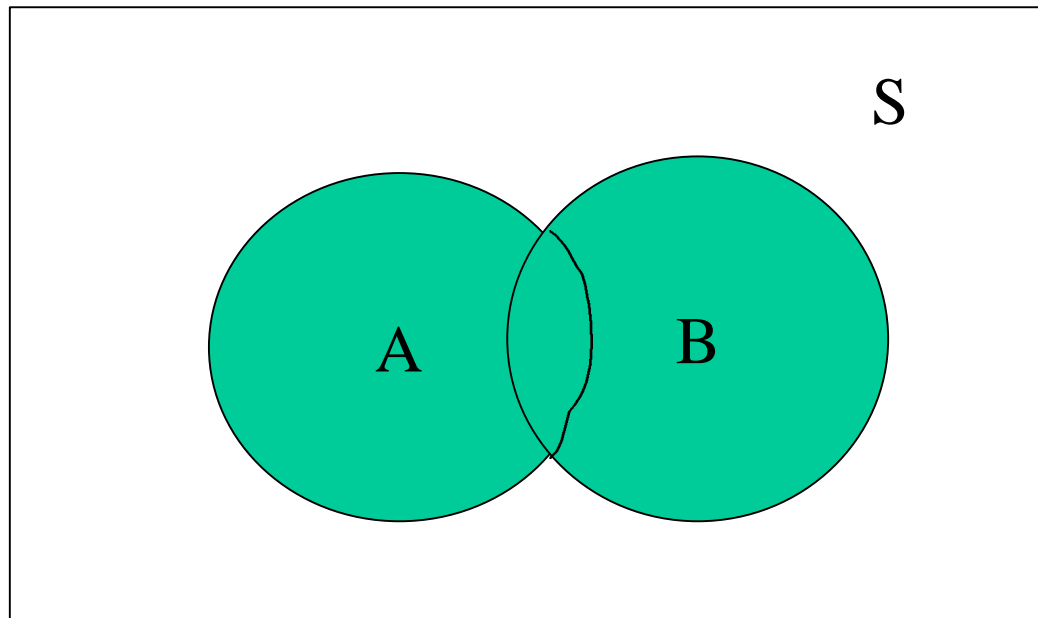
Si chiamano operazioni tra insiemi quelle regole che consentono di costruire un nuovo insieme da due o più altri.

Le più comuni operazioni sono l'unione, l'intersezione, la partizione, la differenza, il complemento.

UNIONE

Si chiama **unione** di due insiemi A e B l'insieme costituito da tutti gli elementi presenti solo in A o solo in B o in entrambi.

$$A \cup B$$



Esempio.

Sia X l'insieme delle persone che hanno i capelli biondi.

Sia Y l'insieme delle persone che hanno gli occhi azzurri.

$X \cup Y$ è costituito da:

- tutte le persone con i capelli biondi anche se non hanno gli occhi azzurri

- tutte le persone con gli occhi azzurri anche se non hanno i capelli biondi

- tutte le persone che hanno sia gli occhi azzurri e i capelli biondi

Esempio.

$$\{1, 2\} \cup \{1, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$$

Notate che l'elemento "1" è elencato una sola volta

L'operazione di unione tra insiemi gode delle seguenti proprietà:

(1) **proprietà dell'idempotenza:** $A \cup A = A$

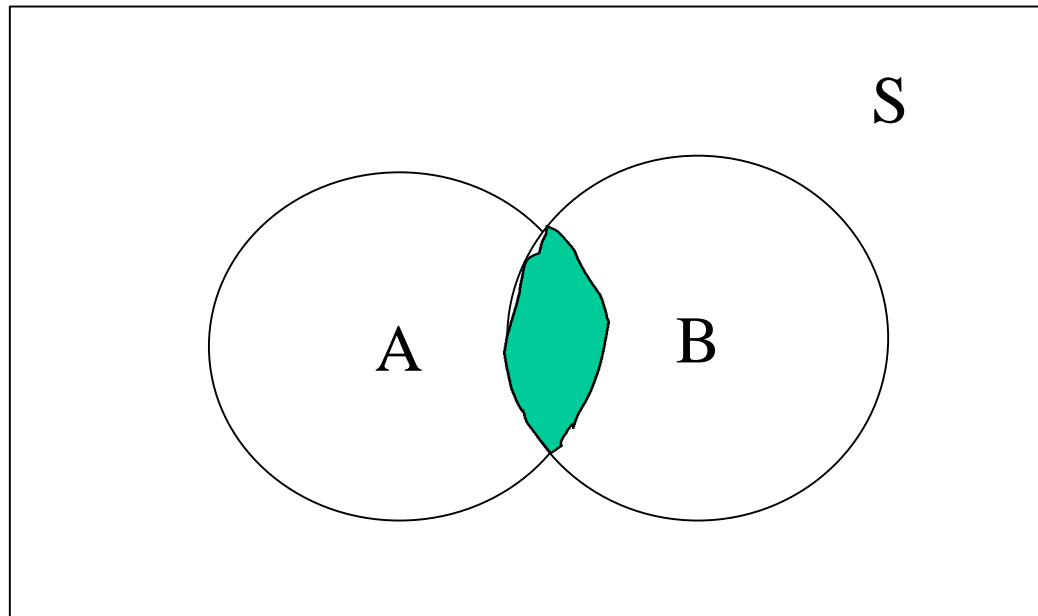
(2) **proprietà commutativa:** $A \cup B = B \cup A$

(3) **proprietà associativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

INTERSEZIONE

Si chiama **intersezione** di due insiemi A e B l'insieme costituito da tutti gli elementi che appartengono contemporaneamente all'insieme A e all'insieme B .

$$A \cap B$$



Esempio.

Sia T l'insieme degli studenti iscritti al corso di laurea in Psicologia dell'Università di Trieste, F l'insieme delle studentesse e M l'insieme degli studenti maschi.

$$T \cap F$$

$$T \cap M$$

$$F \cap M = \emptyset$$

Esempio.

$$\{3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 6, 8\} = \{4, 6\}$$

$$\{3, 4\} \cap \{6, 8\} = \emptyset$$

L'operazione di intersezione tra insiemi gode delle seguenti proprietà:

(1) **proprietà dell'idempotenza:** $A \cap A = A$

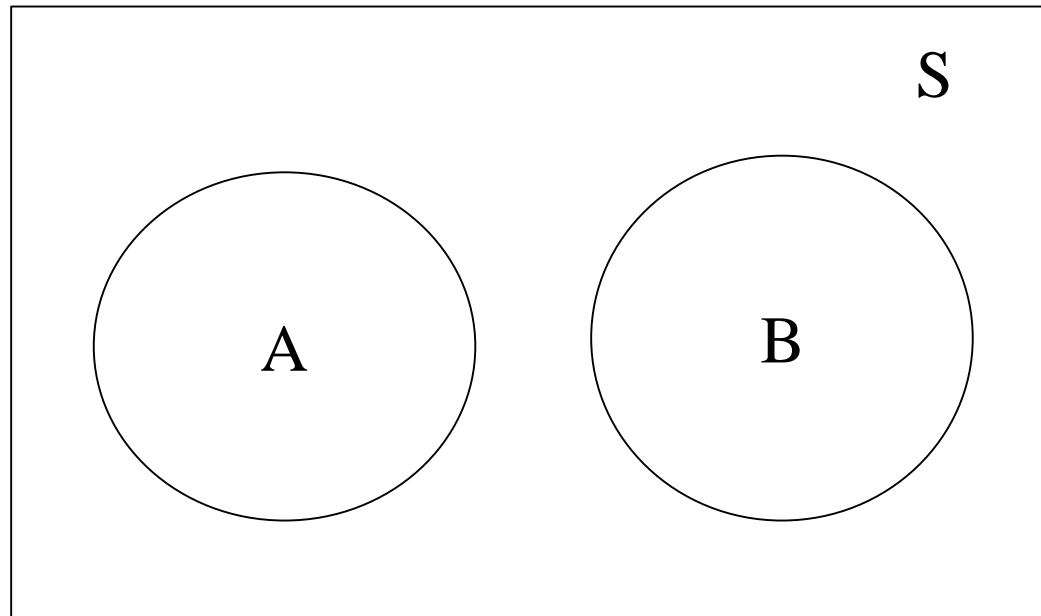
(2) **proprietà commutativa:** $A \cap B = B \cap A$

(3) **proprietà associativa:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

INSIEMI DISGIUNTI

Due insiemi si dicono **disgiunti** se non hanno nessun elemento in comune

$$A \cap B = \emptyset$$



Esempio.

Sia V l'insieme di tutte le vocali dell'alfabeto italiano e sia C l'insieme di tutte le consonanti.

V e C sono disgiunti perché $V \cap C = \emptyset$

ESEMPIO

Sia S l'insieme degli elementi costituiti da ciascuno dei possibili esiti del lancio di un dado: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Si considerino i seguenti insiemi:

$$A = \{1,2\} \quad B = \{1,3\} \quad C = \{2,4,6\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3\} \quad A \cap B = \{1\}$$

B e C sono disgiunti?

SI

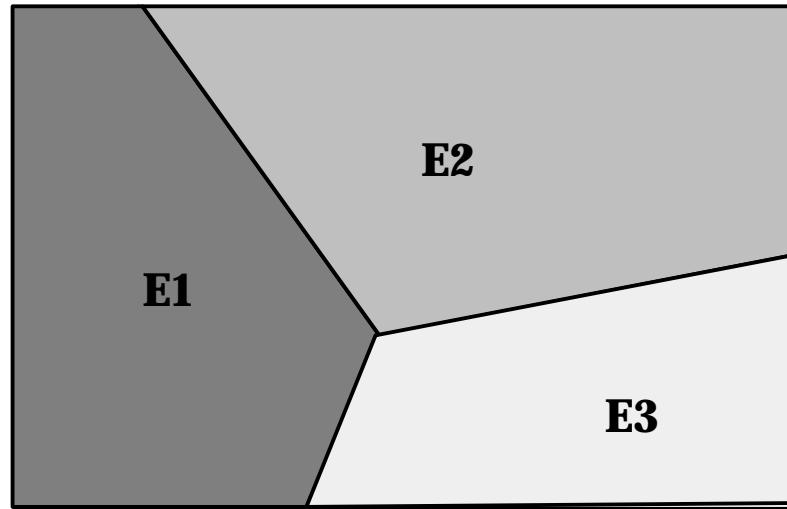
A e C sono disgiunti?

NO

PARTIZIONE DI UN INSIEME

Un insieme di n sottosistemi di un insieme A costituisce una partizione di A se:

- (1) ogni sottosistema non è vuoto**
- (2) i sottosistemi sono disgiunti**
- (3) l'unione di tutti i sottosistemi è uguale all'insieme A**



Gli n sottosistemi vengono chiamati *classi* della partizione.

Esempio.

La suddivisione dell'insieme E degli europei in classi costituite da persone della stessa nazionalità dà luogo alla partizione di E in quanto

- ogni nazionalità europea possiede almeno un abitante
- nessun europeo ha una doppia nazionalità
- l'unione degli abitanti delle varie nazioni dà luogo all'insieme E .

Esempio.

Sia P l'insieme delle persone residenti a Trieste.

Sia P_1 l'insieme delle persone maggiorenni.

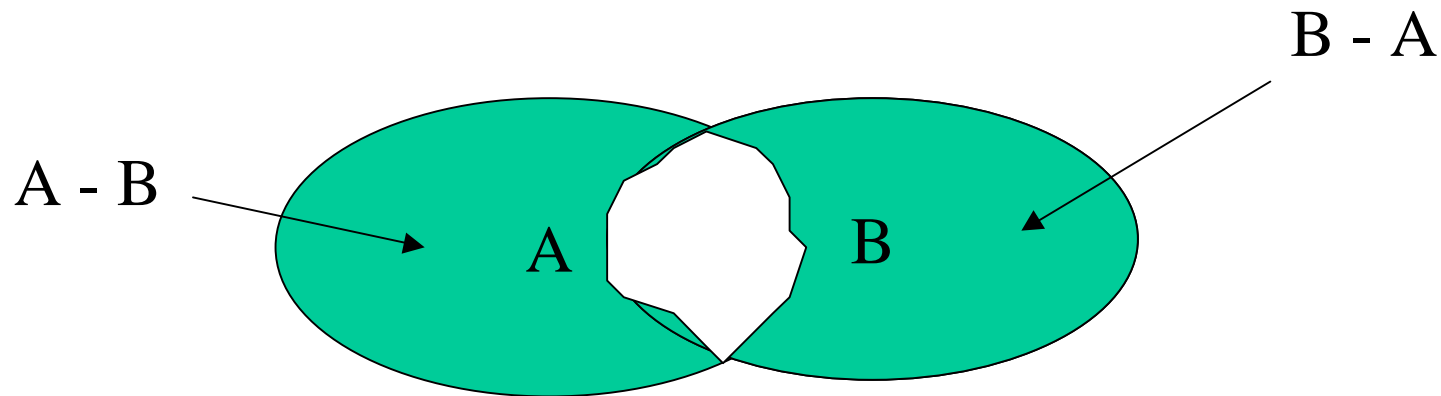
Sia P_2 l'insieme delle persone con età maggiore di 30 anni.

La suddivisione di P nelle due classi P_1 e P_2 non costituisce una partizione di P perché P_1 e P_2 non sono disgiunti:

$P_1 \cap P_2$ è costituito da tutte le persone di età compresa tra i 18 e i 30 anni.

DIFFERENZA

Si chiama **differenza** di due insiemi A e B ($A - B$) l'insieme di tutti gli elementi di A che non appartengono a B .



E' facile rendersi conto che $A - B \neq B - A$

Esempio.

Sia A l'insieme dei mammiferi e B l'insieme degli animali che vivono in mare.

$A - B$ è l'insieme dei mammiferi che non vivono in mare

$B - A$ è l'insieme degli animali che vivono in mare e che non sono mammiferi

$$\{3, 4, 5, 6\} - \{5, 6, 7\} = \{3, 4\}$$

C = insieme di tutte le specie animali che sono carnivori

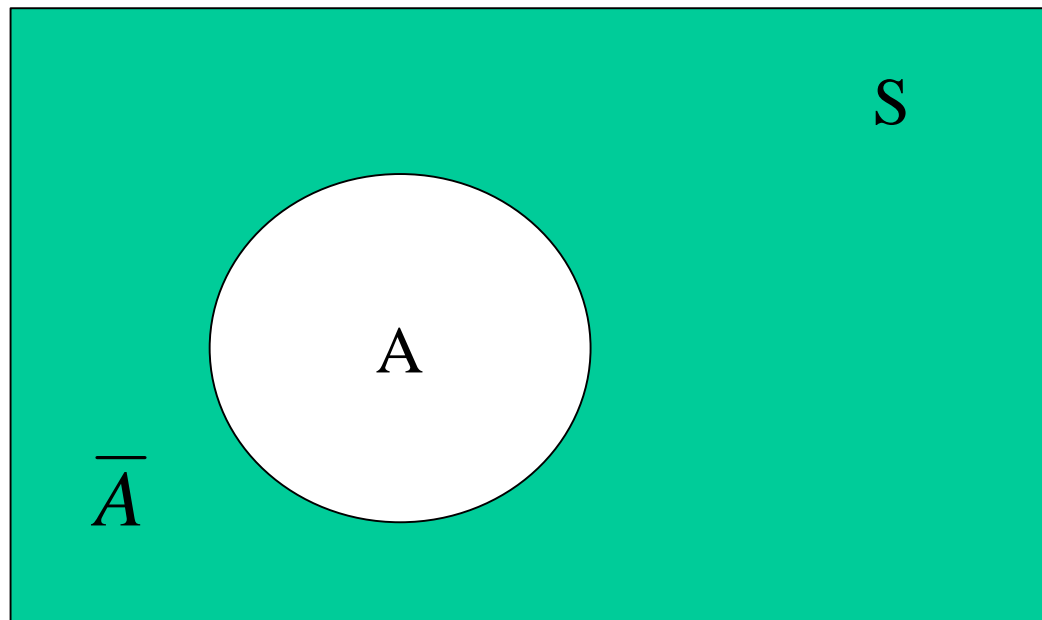
E = insieme di tutte le specie animali che sono erbivori

C - E = “puramente” carnivori, per esempio, leoni e tigri,
ma non orsi.

COMPLEMENTO

Se A è un sottoinsieme di S , allora l'insieme complementare di A in S è l'insieme di tutti gli elementi contenuti in S ma non in A .

\bar{A} oppure A'



Notate che

$$A \cup \bar{A} = S$$

Esempio.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 5\}$$

$$A' = \{1, 3, 4, 6\}$$

Il complementare A' di A gode delle seguenti proprietà:

(1) **A' dipende dalla scelta dell'insieme universo S .**

$$(2) (A')' = A$$

$$(3) A - B = A \cap B'$$

(4) **Leggi di De Morgan:**

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

ESERCIZIO

Disegnate i diagrammi di Venn appropriati per illustrare le due leggi di De Morgan:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

ESERCIZIO

$$A \cap (B \cup C) = ?$$

$$A \cup (B \cap C) = ?$$

$$\overline{(A \cap B)} = ?$$

$$\overline{(A \cup B)} = ?$$

Scegliete una delle seguenti alternative per ciascuna delle espressioni sulla sinistra.

$$\overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ESERCIZIO

Rappresentate le seguenti relazioni tra insiemi mediante dei diagrammi di Venn.

$$1) (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$2) (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

COPPIA ORDINATA

Per coppia ordinata si intende una coppia di elementi in cui sia stabilito quale elemento venga considerato come primo e quale come secondo.

Ne segue che

$$(a, b) \neq (b, a)$$

PRODOTTO CARTESIANO TRA DUE INSIEMI

Dati due insiemi A e B , si definisce come prodotto cartesiano di A e B ($A \times B$) l'insieme di tutte le coppie ordinate, il cui primo elemento sia un elemento di A e il cui secondo elemento sia un elemento di B :

$$\mathbf{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}}$$

Esempio.

Tre persone decidono di andare in villeggiatura.

Sia $A = \{\text{Mario, Paolo, Carlo}\}$

sia $B = \{\text{Mare, Montagna, Collina}\}$ l'insieme delle preferenze.

L'insieme di tutti i possibili modi in cui ogni persona può scegliere un certo tipo di villeggiatura è:

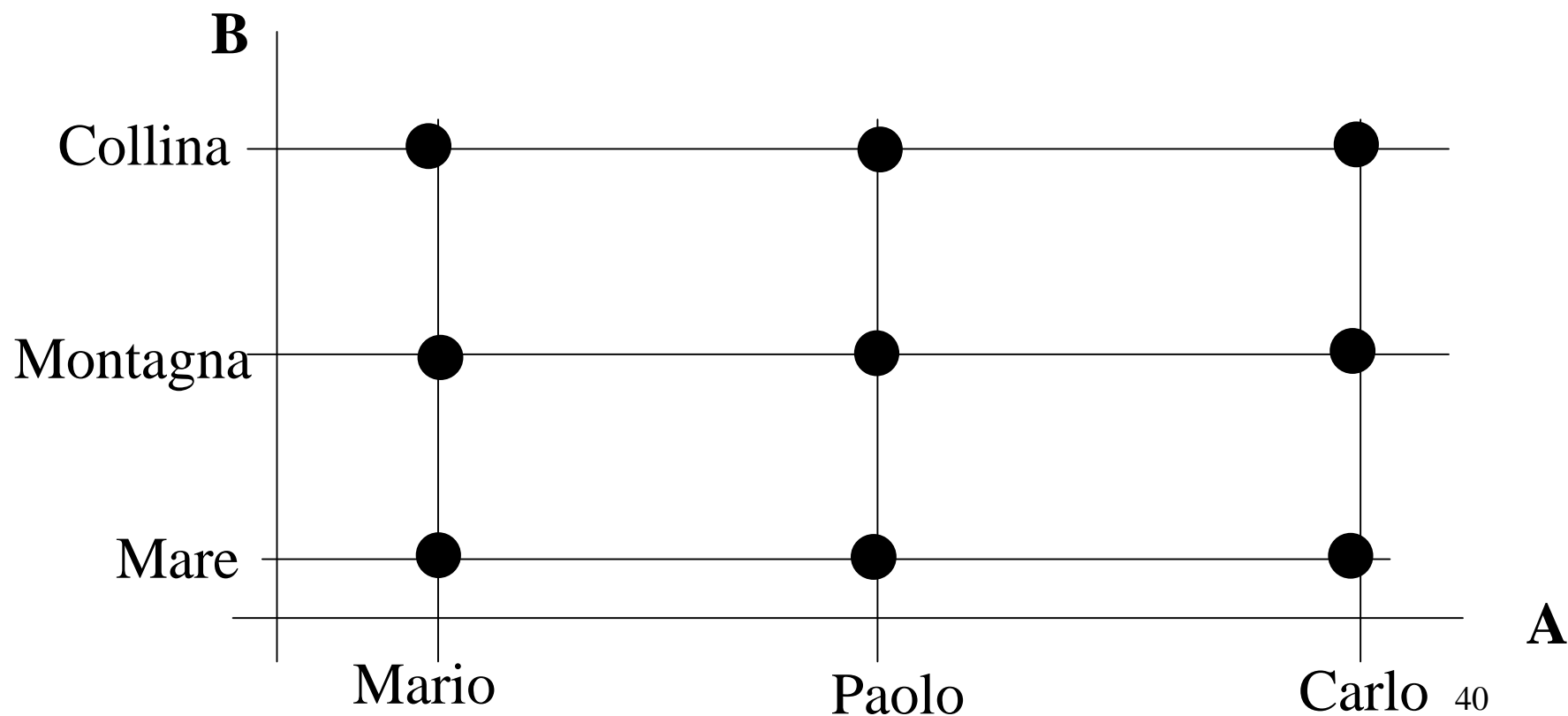
(Mario, Mare) (Mario, Montagna) (Mario, Collina)

(Paolo, Mare) (Paolo, Montagna) (Paolo, Collina)

(Carlo, Mare) (Carlo, Montagna) (Carlo, Collina)

L'insieme di tutte queste possibilità costituisce il prodotto cartesiano $A \times B$.

Si tratta infatti di tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A , il secondo a B .



PROPRIETA' DEL PRODOTTO CARTESIANO TRA DUE INSIEMI

a) $A \times B = B \times A$, se A è diverso da B

b) $A \times \emptyset = \emptyset$

**c) se A e B sono finiti, il numero degli elementi di $A \times B$
è dato dal prodotto del numero degli elementi di A
per il numero degli elementi di B .**

RELAZIONI

Per *relazione* si intende un legame o connessione di qualunque tipo purché ben definito esistente tra gli elementi di uno o più insiemi.

Es. relazione di parentela tra cugini, relazione tra il colore degli occhi e il colore dei capelli di una persona, tra il tipo di nutrizione e la statura di un individuo adulto...

Esempio. Se P è l'insieme dei padri e F è l'insieme dei figli, secondo la teoria degli insiemi “essere padre di” è una relazione perché connette l'insieme P dei padri con l'insieme F dei figli.

Con 3 insiemi, dove P è l'insieme dei padri, M è l'insieme delle madri e F è l'insieme dei figli, la relazione “essere genitori di” individua delle coppie ordinate (a, b, c) dove c è il figlio di un padre a e di una madre b .

Ogni relazione tra n insiemi individua dunque delle n -uple ordinate di elementi di tali insiemi.

RELAZIONE BINARIA TRA DUE INSIEMI

Dati due insiemi A e B , si dice relazione binaria R tra A e B un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$,

ovvero un qualunque insieme di coppie ordinate (a, b) dove a è un elemento di A e b è un elemento di B .

Esempio.

Sia B un insieme di 4 bambini
e sia A l'insieme dei tipi di disegno eseguito dai bambini.

$B = \{\text{Mario, Paolo, Carlo, Chiara}\}$

$A = \{\text{albero, cane, cavallo, casa}\}$

Mario ha disegnato una casa

Paolo ha disegnato un albero e un cane

Carlo non ha eseguito alcun disegno

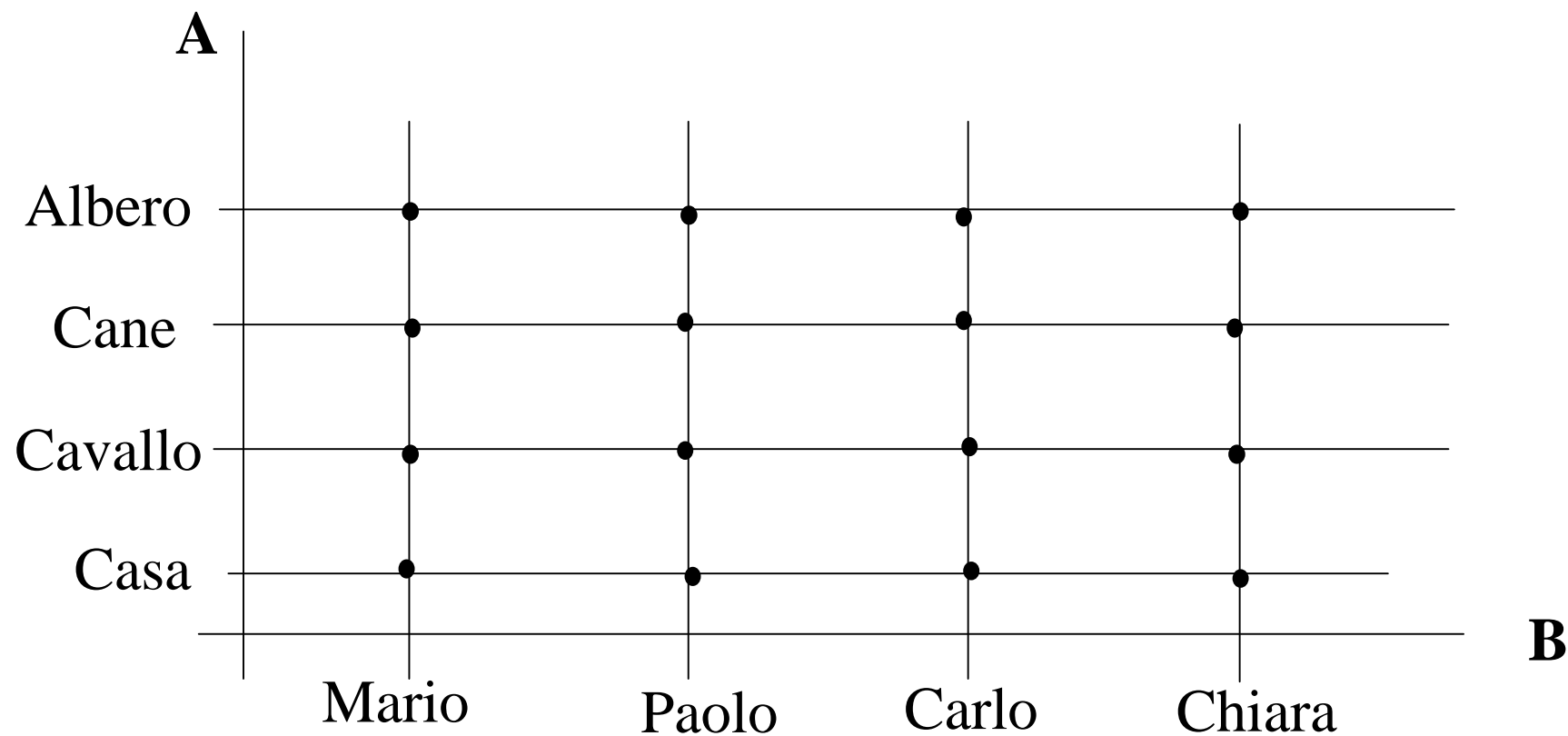
Chiara ha disegnato un cavallo

Sia R la relazione binaria tale per cui

“ bRa se e solo se il bambino b ha eseguito il disegno a ”.

R è costituita da tutte le coppie (b, a) dove a è il disegno eseguito dal bambino b .

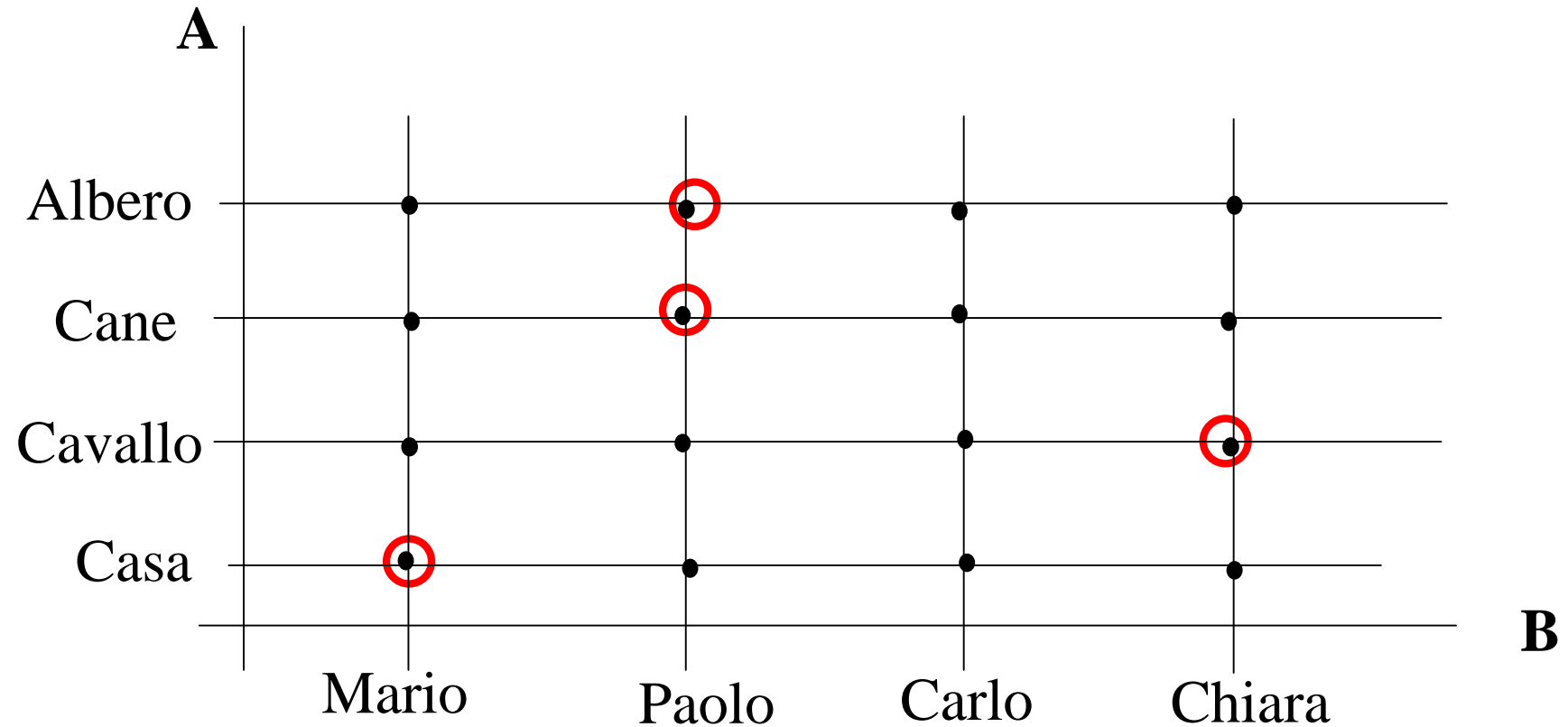
Il prodotto cartesiano $B \times A$ dei due insiemi indipendentemente dal tipo di relazione è costituito da tutte le coppie ordinate (b, a) .



La relazione R è costituita dalla seguenti coppie:

**$R = \{$ (Mario, casa),
 (Paolo, albero),
 (Paolo, cane),
 (Chiara, cavallo) $\}$**

R è l'insieme dei punti $B \times A$ indicati con un cerchietto.



Si noti che R è un sottoinsieme di $B \times A$.

Esempio. Consideriamo l'interazione tra 6 neuroni:

$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Un neurone può spedire un impulso nervoso a un altro neurone (\longrightarrow), oppure può non spedirlo. L'impulso nervoso viaggia in una sola direzione. Il neurone a , ad esempio, può spedire un impulso ai neuroni b e c , ma non può ricevere impulsi da essi.

La relazione “ a può spedire un impulso a b ” si può rappresentare come una coppia ordinata (a, b) .

L'insieme prodotto $S \times S$ è costituito da 36 elementi che rappresentano tutte le possibili connessioni tra i 6 neuroni.

Le connessioni effettivamente esistenti sono un sottoinsieme di $S \times S$, e sono denotate da R .

Supponiamo che il sottoinsieme R contenga i seguenti elementi:

$$R = \{(a,b), (a,d), (c,a), (b,d), (b,c), \\ (c,d), (d,e), (c,f), (d,f), (f,e)\}$$

Il sottoinsieme R rivela le relazioni che intercorrono tra i neuroni.

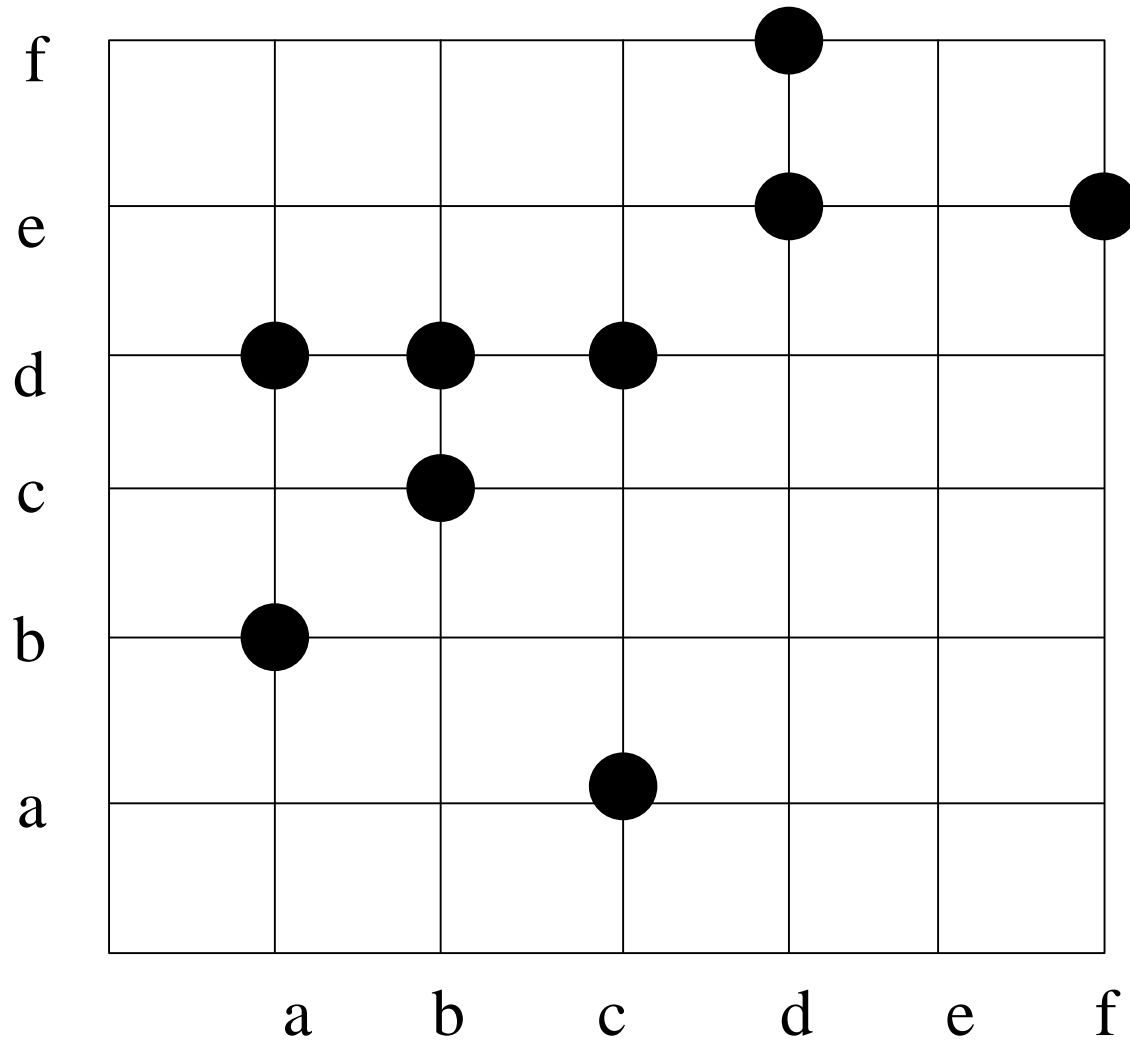
Il sottoinsieme R è chiamato una *relazione* nell'insieme prodotto $S \times S$.

Per rendere esplicito che la relazione R intercorre all'interno della coppia ordinata (a, b) , si scrive

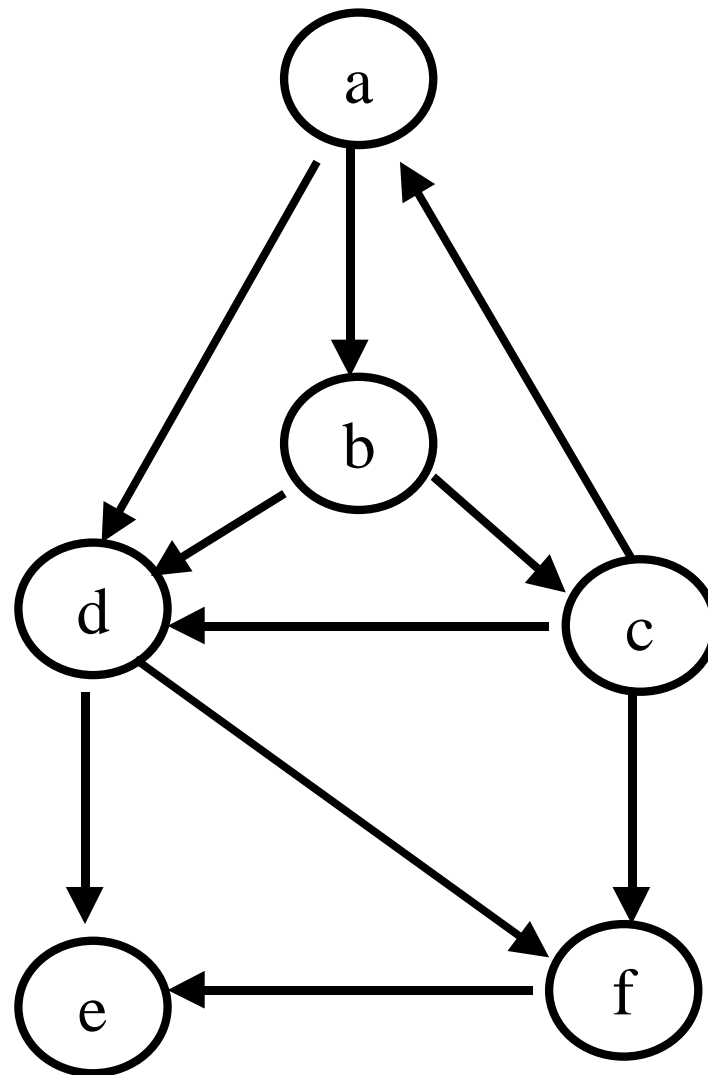
$$aRb$$

e si legge: “ a è in relazione R con b ”

Neurone che riceve l'impulso



Neurone che trasmette l'impulso



DOMINIO DI UNA RELAZIONE BINARIA

Si dice dominio D di una relazione binaria R definita in $A \times B$ l'insieme di tutti i primi elementi delle coppie ordinate che costituiscono R .

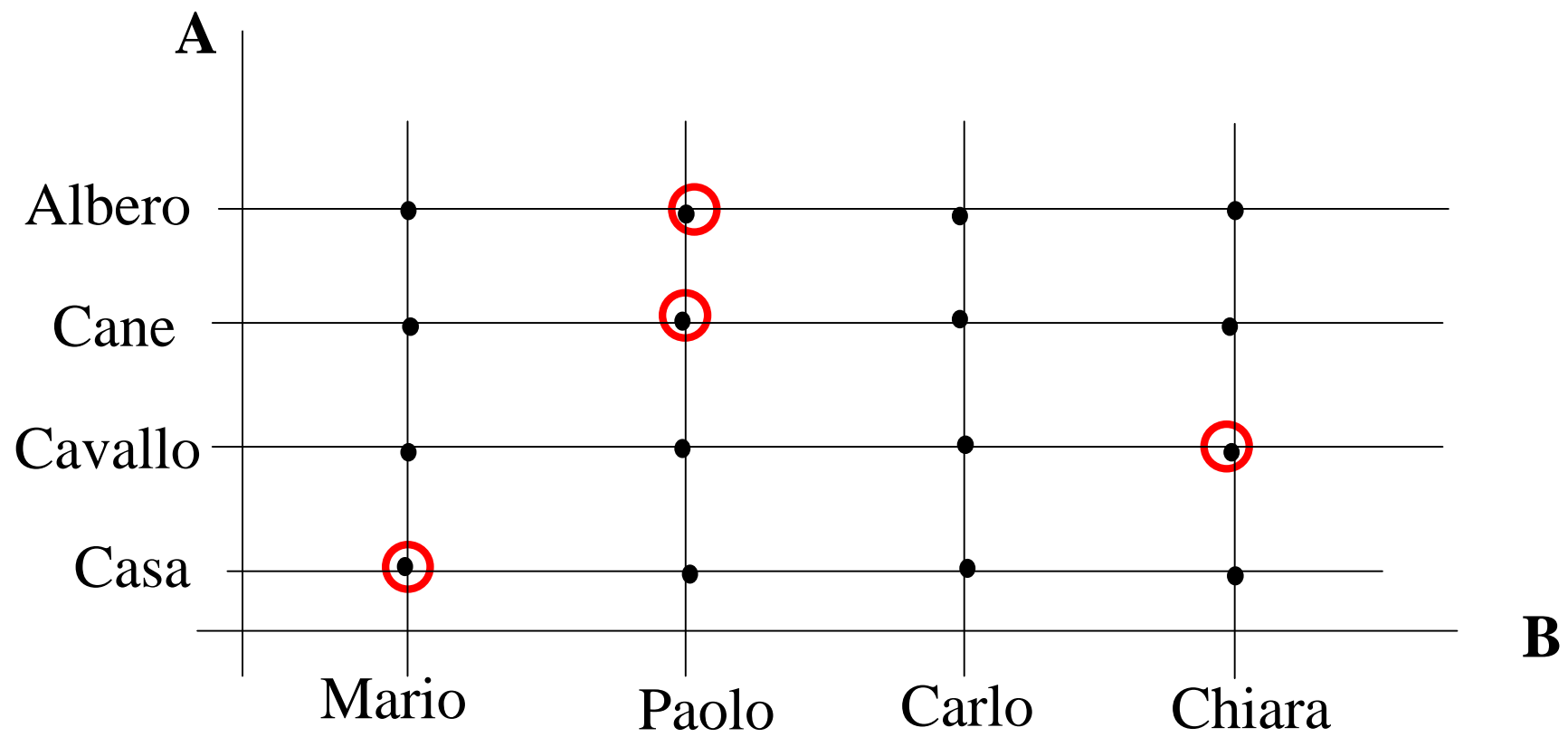
Si tratta di un sottoinsieme di A .

Nell'esempio precedente, il dominio della relazione R definita in $B \times A$ è

{Mario, Paolo, Chiara}

poiché Carlo non ha eseguito nessun disegno.

Dal punto di vista grafico, il dominio D è rappresentato dalla proiezione sull'asse delle ascisse dei punti del piano cartesiano che individuano la relazione.



CODOMINIO DI UNA RELAZIONE BINARIA

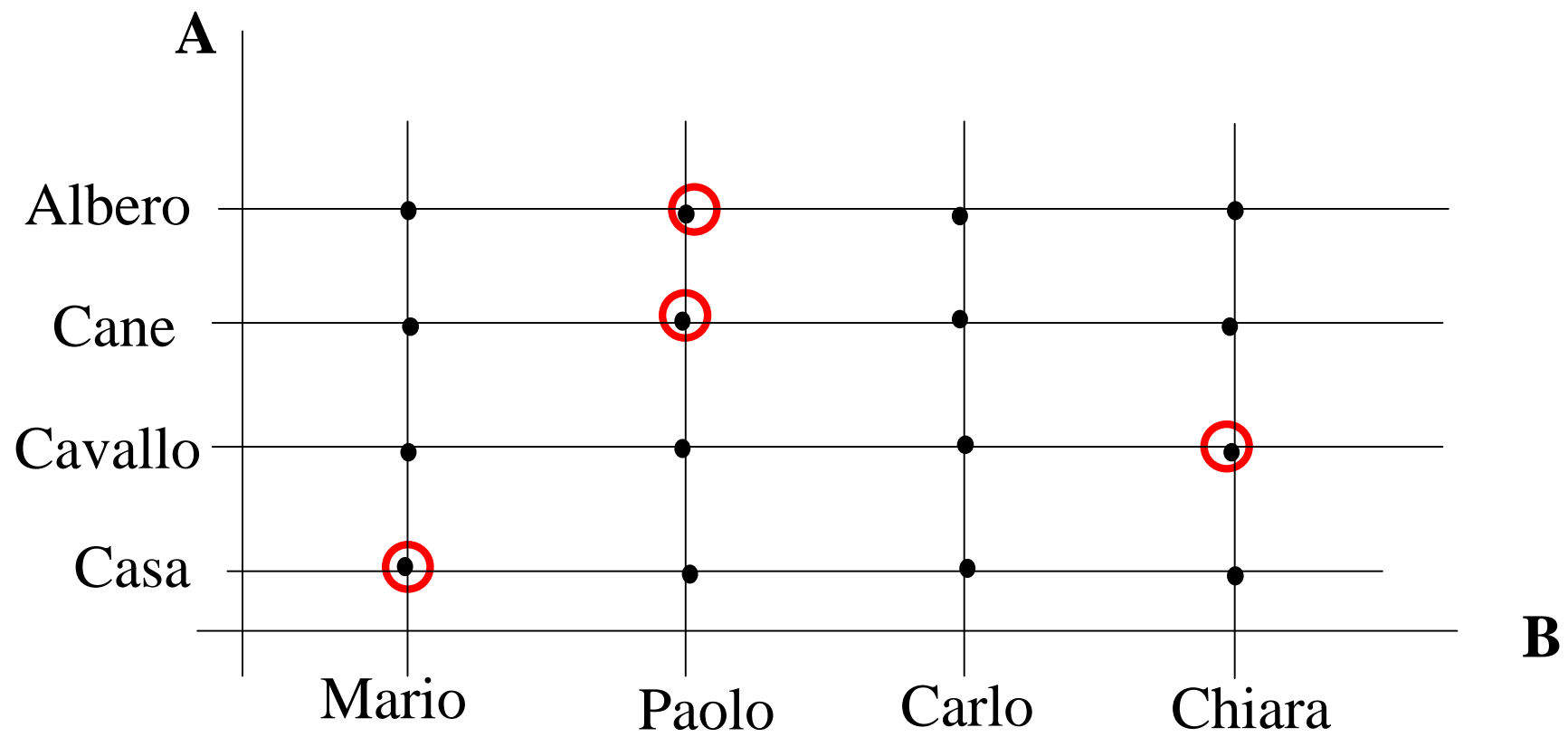
Si dice codominio C di una relazione binaria R definita in $A \times B$ l'insieme di tutti i secondi elementi delle coppie ordinate che costituiscono R .

Si tratta di un sottoinsieme di B .

Nell'esempio precedente, il codominio della relazione è

$$C = \{\text{albero, cane, cavallo, casa}\}$$

Dal punto di vista grafico, il dominio D è rappresentato dalla proiezione sull'asse delle ordinate dei punti del piano cartesiano che individuano la relazione.



RELAZIONE BINARIA IN UN INSIEME

Si dice relazione binaria R definita in un insieme A , un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$:

$$\mathbf{R \subseteq A \times A}$$

Esempio. La relazione R che associa a ogni numero naturale il suo doppio è una relazione binaria nell'insieme dei numeri naturali.

Esempio. Dato un insieme P di persone, la relazione “ x è amico di y ” è una relazione binaria in P .

RELAZIONE N -ARIA TRA INSIEMI

Si dice relazione n -aria tra gli insiemi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$$

Esempio.

La relazione “essere genitori di” è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $P \times M \times F$ ($P =$ padri, $M =$ madri, $F =$ figli). Si tratta perciò di una relazione ternaria.

Relazioni binarie:

- **Relazioni di equivalenza**
- **Relazioni d'ordine**

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

Una *relazione binaria* definita in un insieme A si dice una relazione di equivalenza (\sim) se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

1. " $a \in A \Rightarrow a \sim a$ (*riflessiva*)

2. " $a, b \in A \Rightarrow a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ (*simmetrica*)

3. " $a, b, c \in A \Rightarrow a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (*transitiva*)

Due elementi si dicono *equivalenti* quando si dimostrano uguali rispetto ad una certo attributo (ma non rispetto ad altri).

Due elementi si dicono *uguali* quando coincidono rispetto a qualsiasi attributo.

Esempio.

La relazione “essere coetaneo di” in un insieme P di persone è una relazione di equivalenza.

La relazione “risiedere nella stessa città” è una relazione di equivalenza.

CLASSE DI EQUIVALENZA

L'insieme di tutti gli elementi equivalenti all'elemento $x \in A$ si indica con $[x]$ e si chiama *classe di equivalenza*.

Le classi di equivalenza

1. *contengono almeno un elemento*
2. *sono disgiunte*
3. *il loro insieme esaurisce l'insieme A (dunque definiscono una partizione di A)*

L'insieme delle classi di equivalenza dell'insieme A individua una partizione in A . Tale partizione si chiama *partizione associata alla relazione di equivalenza*.

Esempio.

In una galleria d'arte la suddivisione dei quadri rispetto all'autore costituisce una *partizione* dell'insieme di quadri.

Le *classi* della partizione sono costituite dai quadri dello stesso autore.

La partizione individua dunque la *relazione di equivalenza* “il quadro x è in relazione con il quadro y se e solo se x e y sono stati eseguiti dallo stesso autore”.

INSIEME QUOZIENTE

Sia \sim una relazione di equivalenza definita in un insieme A .

Si dice *insieme quoziente* di un insieme A rispetto alla relazione di equivalenza \sim ,

e si scrive A/\sim ,

l'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza individuate dalla relazione di equivalenza \sim .

Esempio.

In un insieme di studenti universitari P in cui si consideri la relazione di equivalenza “essere iscritti allo stesso anno di corso”, l’insieme quoziente è dato dall’insieme degli anni di corso.

Relazioni d'ordine:

ORDINE STRETTO PARZIALE

ORDINE STRETTO TOTALE

ORDINE LARGO PARZIALE

ORDINE LARGO TOTALE

ORDINE STRETTO PARZIALE ($<$)

Una relazione binaria definita in un insieme A si dice d'ordine stretto parziale, e si scrive $x < y$, se gode delle proprietà asimmetrica e transitiva.

1. " $a, b \hat{\in} A \quad a < b \quad \mathcal{P} \quad b \text{ NON } E' < a$ (asimetrica)

2. " $a, b, c \hat{\in} A \quad a < b, b < c \quad \mathcal{P} \quad a < c$ (transitiva)

Il termine “parziale” indica che la relazione d'ordine non è necessariamente estesa a tutte le coppie dell'insieme.

Esempio.

Dato un insieme di persone P , viene definita la relazione d'ordine stretto parziale “*essere più giovane di*”.

Se a è più giovane di b , b non può essere più giovane di a (*proprietà asimmetrica*).

Se a è più giovane di b , b è più giovane di c , a sarà più giovane di c (*proprietà transitiva*).

La relazione d'ordine è *parziale* perché due persone a e b possono essere della stessa età, per cui la relazione d'ordine non vale.

ORDINE STRETTO TOTALE (<)

Una relazione binaria definita in un insieme A si dice d'ordine stretto totale, e si scrive $x < y$, se gode delle proprietà asimmetrica, transitiva, connessa.

1. " $a, b \hat{\in} A \quad a < b \quad \text{P} \quad b \text{ NON } E' < a$ (asimetrica)
2. " $a, b, c \hat{\in} A \quad a < b, b < c \quad \text{P} \quad b < c$ (transitiva)
3. " $a, b \hat{\in} A \quad a \neq b \quad \text{P} \quad a < b \text{ o } b < a$ (connessione)

Esempio.

La relazione “*essere più giovane di*” è una relazione d’ordine *stretto totale* solo se non esistono nell’insieme P persone della stessa età.

Se due persone distinte $a \neq b$ sono coetanei, allora non si verifica né $a < b$ né $b < a$ e quindi la relazione “*essere più giovane di*” non si estende a tutti gli elementi in P .

Esempio.

La relazione “ $<$ ” nei numeri reali è un ordine stretto totale.

ORDINE LARGO PARZIALE (\leq)

Una relazione binaria definita in un insieme A si dice d'ordine largo parziale, e si scrive $x \leq y$, se gode delle proprietà riflessiva e transitiva.

1. " $a \hat{\in} A \quad a \leq a$ (*riflessività*)

2. " $a, b, c \hat{\in} A \quad a \leq b, b \leq c \quad \mathcal{P} \quad b \leq c$ (*transitiva*)

Esempio.

In un insieme di oggetti O , la relazione “essere non più pesante di” è un ordine largo parziale.

Infatti, ciascuna oggetto non è più pesante di se stesso (riflessività).

Se l'oggetto x non è più pesante di y , e y non è più pesante di w , x non è più pesante di w (transitività).

ORDINE LARGO TOTALE (\leq)

Una relazione binaria definita in un insieme A si dice d'ordine largo totale, e si scrive $x \leq y$, se gode delle proprietà riflessiva, transitiva e della connessione.

1. " $a \hat{I} A \quad a \leq b \quad \mathcal{P} \quad a \leq a$ (riflessività)
2. " $a, b, c \hat{I} A \quad a \leq b, b \leq c \quad \mathcal{P} \quad b \leq c$ (transitività)
3. " $a, b \hat{I} A \quad \mathcal{P} \quad a \leq b \quad o \quad b \leq a$ (connessione)

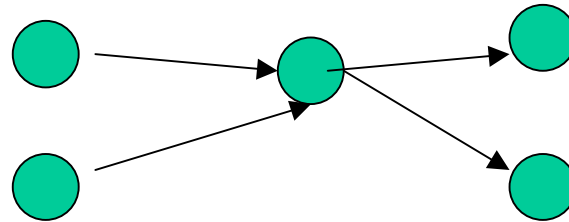
Esempio.

La relazione “*essere di aggressività maggiore o uguale a*” in un insieme P di persone definisce una relazione d'ordine largo totale.

Date due persone a e b , risulta o a è di aggressività maggiore o uguale a b , o viceversa.

**Asimmetria
(ordine
stretto)**

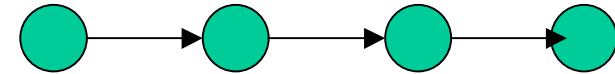
Parzialità



Ordine stretto parziale

- *asimmetria*
- *transitività*

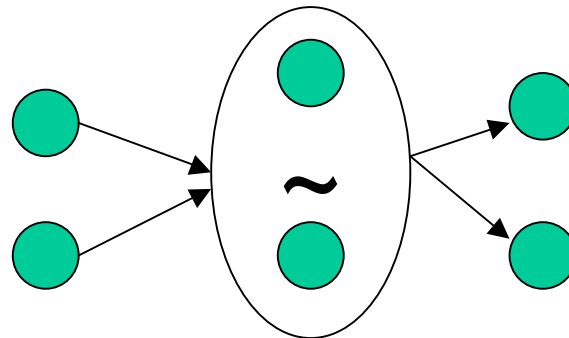
Totalità (o connessione)



Ordine stretto totale

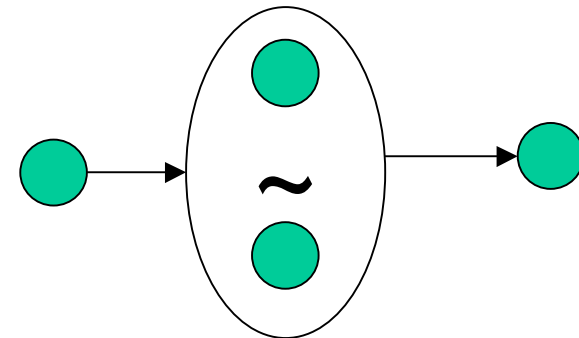
- *asimmetria*
- *transitività*
- *connessione*

Riflessività



Ordine largo parziale

- *riflessività*
- *transitività*



Ordine largo totale

- *riflessività*
- *transitività*
- *connessione*

ESERCIZI

Si consideri il livello di scolarità nella scuola dell'obbligo e la relazione G “avere un grado di scolarità non superiore a”.

Che tipo di relazione d'ordine è G ?

Nell'insieme $P = \{\text{Maria, Roberto, Gianna, Luigi}\}$, Maria e Roberto sono alti m 1.65, Gianna m 1.60, Luigi 1.70.

Che tipo di relazione è la relazione “essere più alto di”?

Funzioni

Consideriamo un insieme U di persone e l'insieme F delle impronte digitali.

Dato che la relazione tra impronte digitali e persone è di interesse pratico, possiamo definire la coppia ordinata (impronte digitali, persona)

Queste coppie ordinate costituiscono l'insieme prodotto $F \times U$.

Definiamo R la relazione che associa una impronta digitale alla persona appropriata. Come in precedenza, R è un sottoinsieme di $F \times U$.

In questo esempio, la relazione esaminata ha una particolare proprietà.

L'impronta digitale x è associata soltanto alla persona y , e a nessun altro in modo tale che, conoscendo l'impronta digitale, possiamo identificare in maniera univoca la persona a cui appartiene.

Una relazione di questo tipo è chiamata *funzione*.

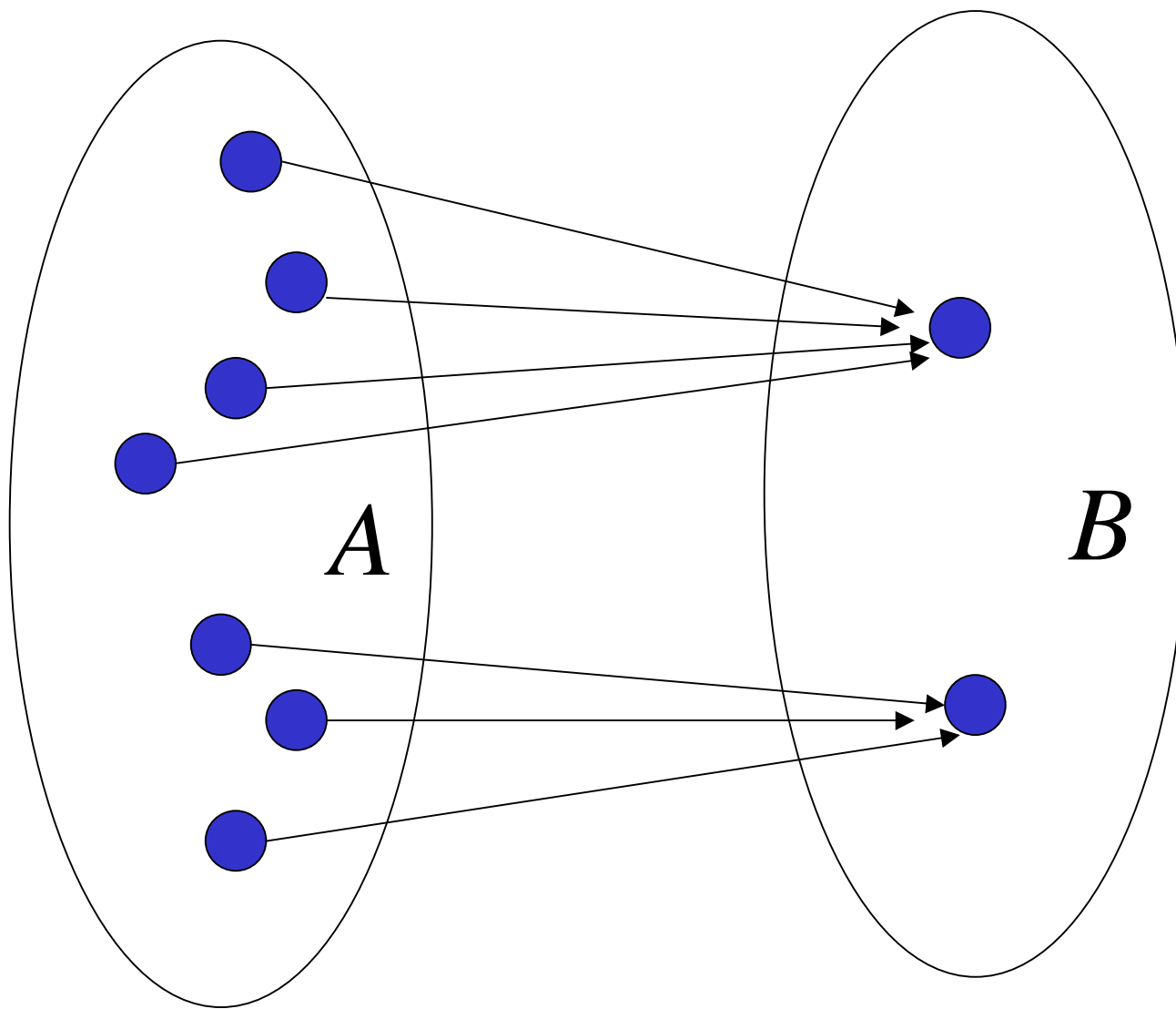
Ciò che caratterizza una funzione è il fatto che l'associazione tra due elementi è unica: un'impronta digitale può appartenere ad una persona soltanto.

Tuttavia, questa unicità è solo in una direzione: ciascuna persona, infatti, ha più di una impronta digitale.

Per parlare di funzione si richiede che l'unicità della associazione sia data in una direzione soltanto. Questa direzionalità della relazione viene indicata dall'ordinamento della coppia ordinata (impronta digitale, persona).

Le funzioni sono dunque un sottoinsieme delle relazioni binarie.

La loro caratteristica fondamentale è di collegare ogni elemento di un insieme A con uno e un solo elemento di un insieme B .



Impronte digitali

Persone

Una relazione R tra un insieme A e un insieme B si dice una funzione se soddisfa le due seguenti condizioni:

1. Il dominio della relazione R coincide con l'intero insieme A .

2. R è una regola di qualsiasi natura che associa a ogni elemento di A un unico elemento di B .

L'insieme A si dice *dominio* della funzione.

L'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Esempio.

Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ l'insieme di 5 oggetti e sia B l'insieme dei pesi espressi in grammi.

La relazione che associa a ogni oggetto il proprio peso in grammi è una funzione f di A in B .

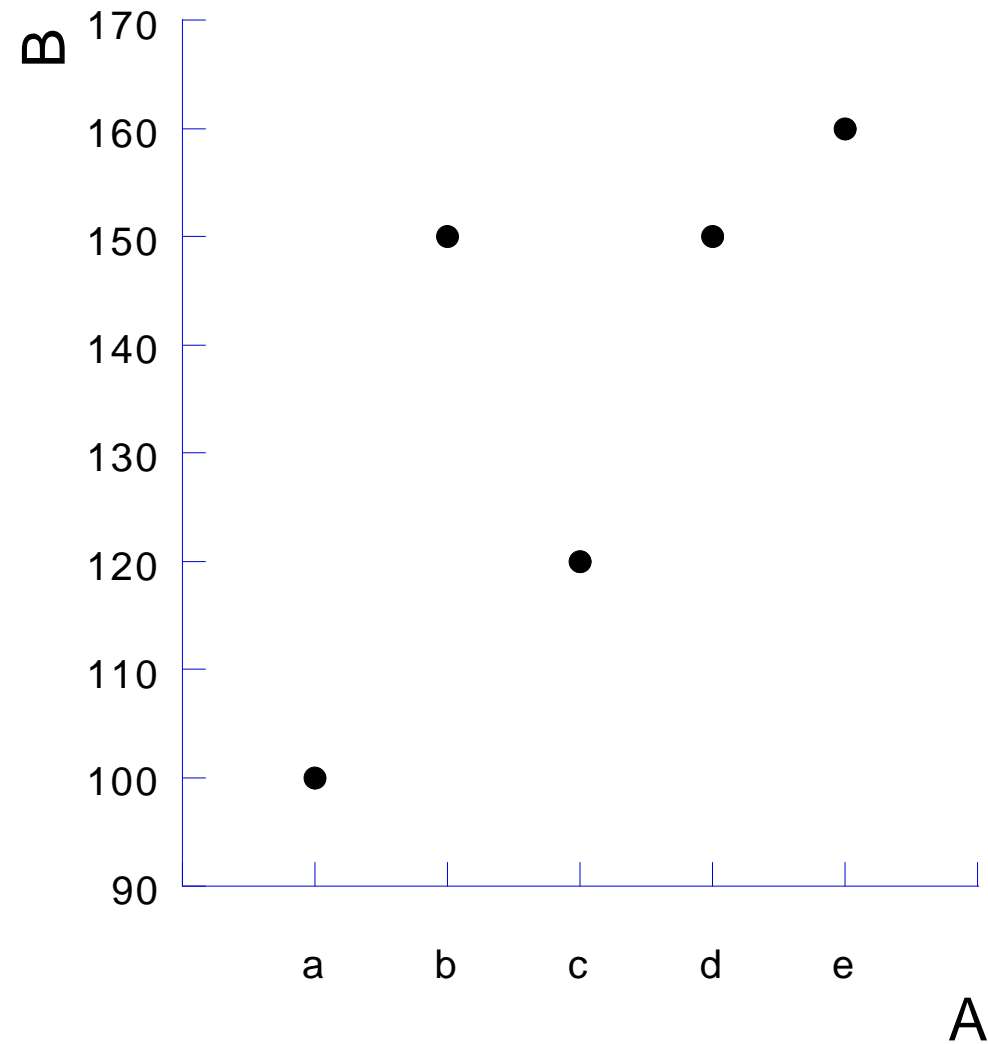
Nella tabella vengono indicati i valori di questa funzione, ovvero i pesi dei 5 oggetti.

A	a	b	c	d	e
$f(a)$	100	150	120	150	160

Notate che a ciascun oggetto corrisponde un unico peso
- se un oggetto pesa 100 grammi, non può contemporaneamente pesare 100 e 150 grammi.

Viceversa, un peso può corrispondere a più oggetti (gli oggetti b e d pesano 150 grammi)

Rappresentazione grafica della funzione sul piano cartesiano.

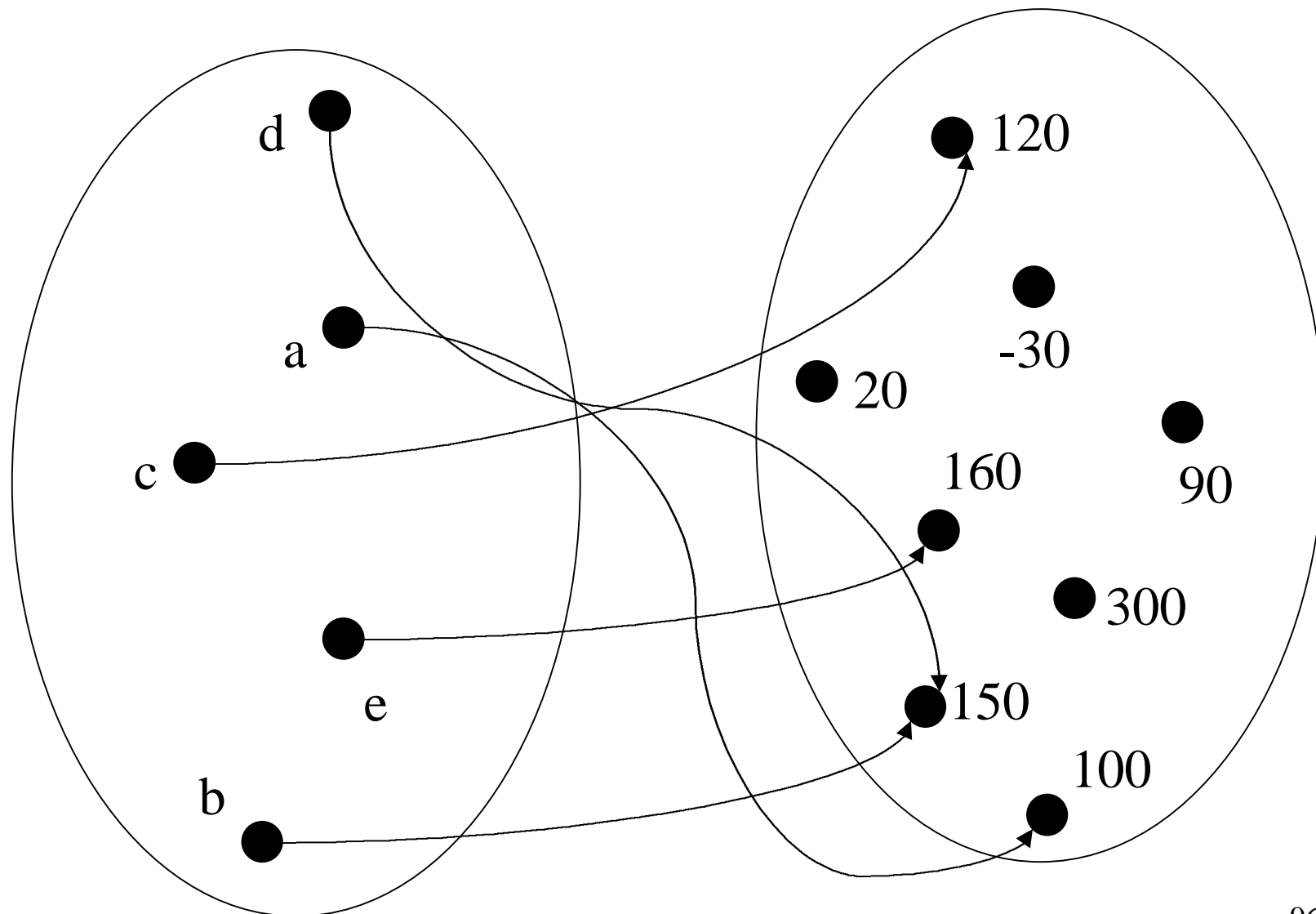


Una funzione, oltre che sul piano cartesiano, può essere rappresentata anche mediante diagrammi di Venn.

Dominio e codominio della funzione sono racchiusi da una linea di contorno.

La regola che associa a ciascun elemento di A un elemento di B viene rappresentata mediante delle linee orientate da A verso B .

Rappresentazione grafica della funzione mediante diagrammi di Venn



Differenza tra funzione e relazione

Sia B un insieme di 4 bambini e sia A l'insieme dei vari tipi di disegno eseguito dai bambini.

Mario ha disegnato una casa

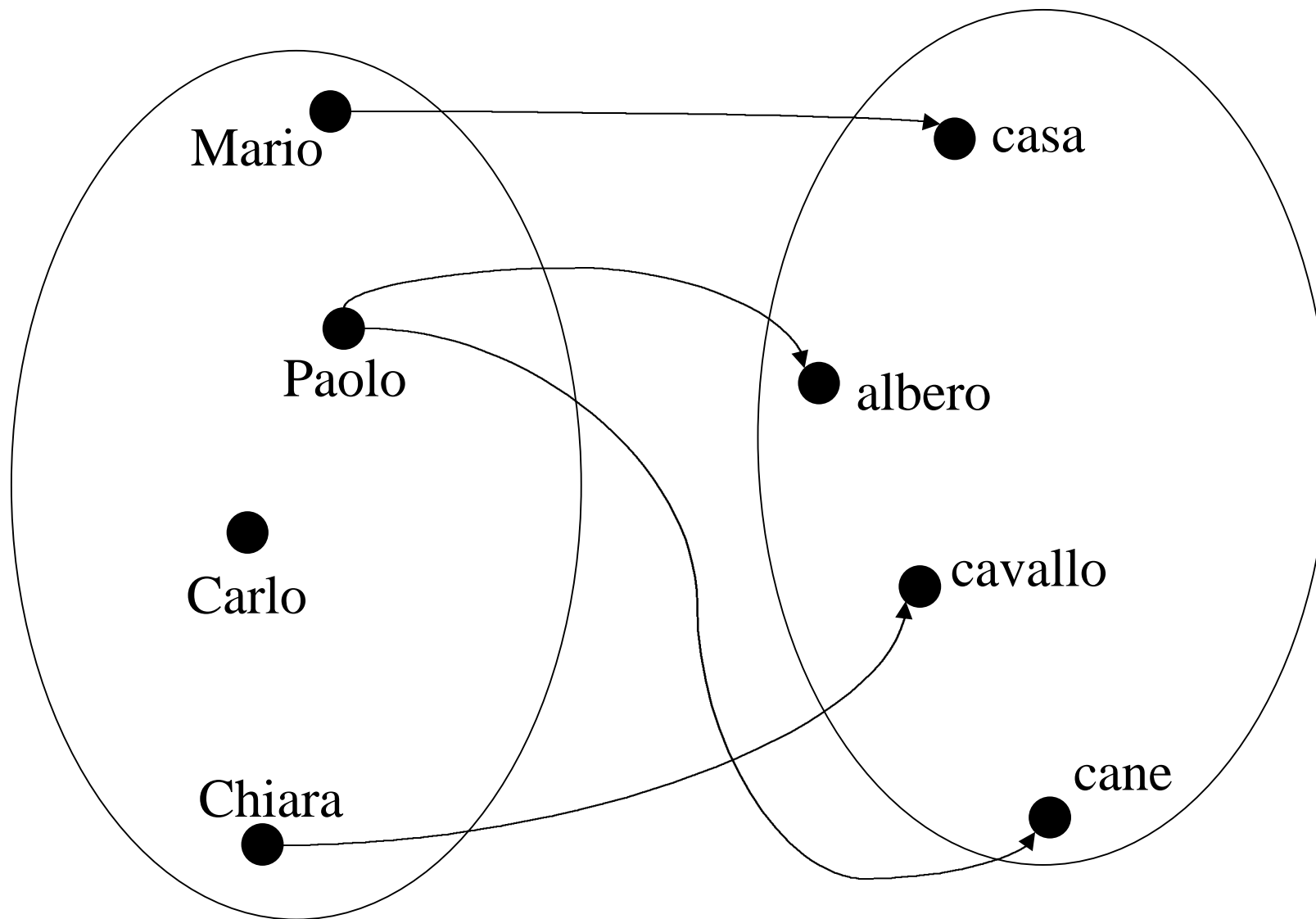
Paolo ha disegnato un albero e un cane

Carlo non ha eseguito alcun disegno

Chiara ha disegnato un cavallo

$A = \{\text{albero, cane, cavallo, casa}\}$

$B = \{\text{Mario, Paolo, Carlo, Chiara}\}$

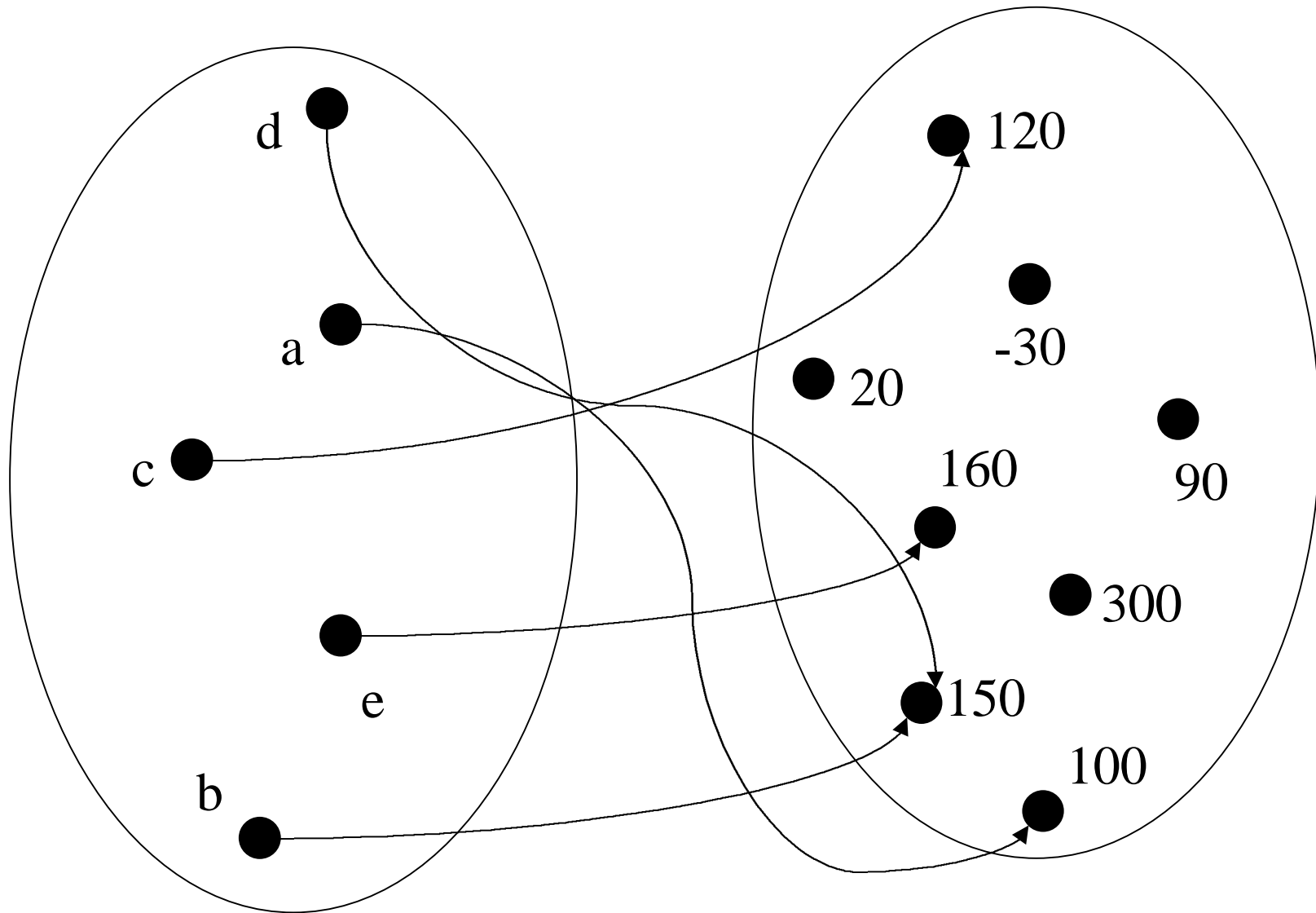


Questa relazione non è una funzione. Infatti, a Paolo sono associati due disegni diversi (albero e cane). Ciò è incompatibile con la definizione di funzione in quanto *a ogni elemento del dominio* (es., Paolo) *deve corrispondere un unico elemento del codominio* (nel nostro caso invece ce ne sono due: albero e cane).

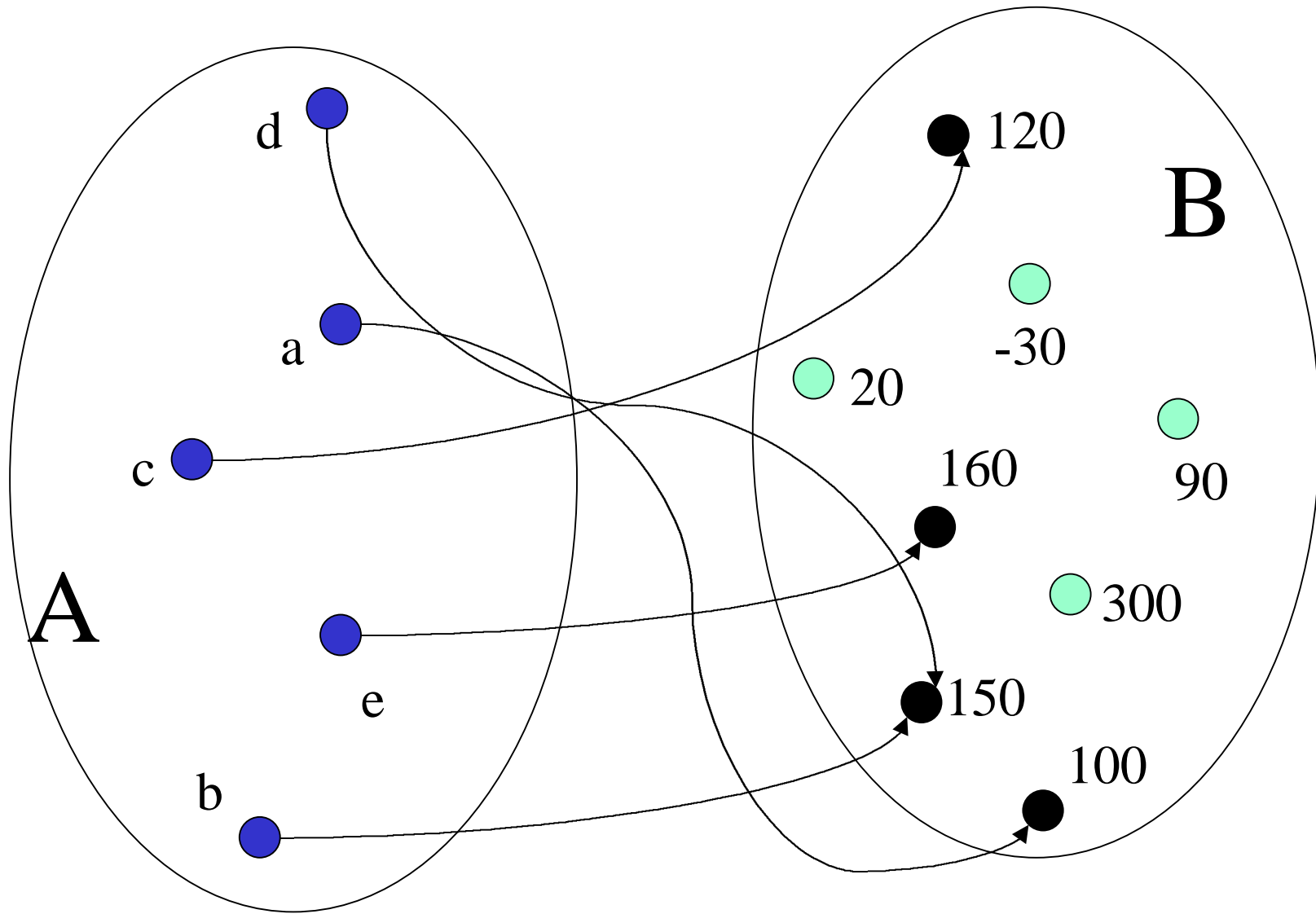
Inoltre, a Carlo non corrisponde alcun disegno, perché Carlo non ha eseguito nessun disegno. In una funzione, invece, a ogni elemento del dominio deve corrispondere un elemento del codominio.

INSIEME IMMAGINE

Si dice *immagine* dell'insieme A mediante la funzione f , e si indica con $f(A)$, il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi che provengono da almeno un elemento di A .



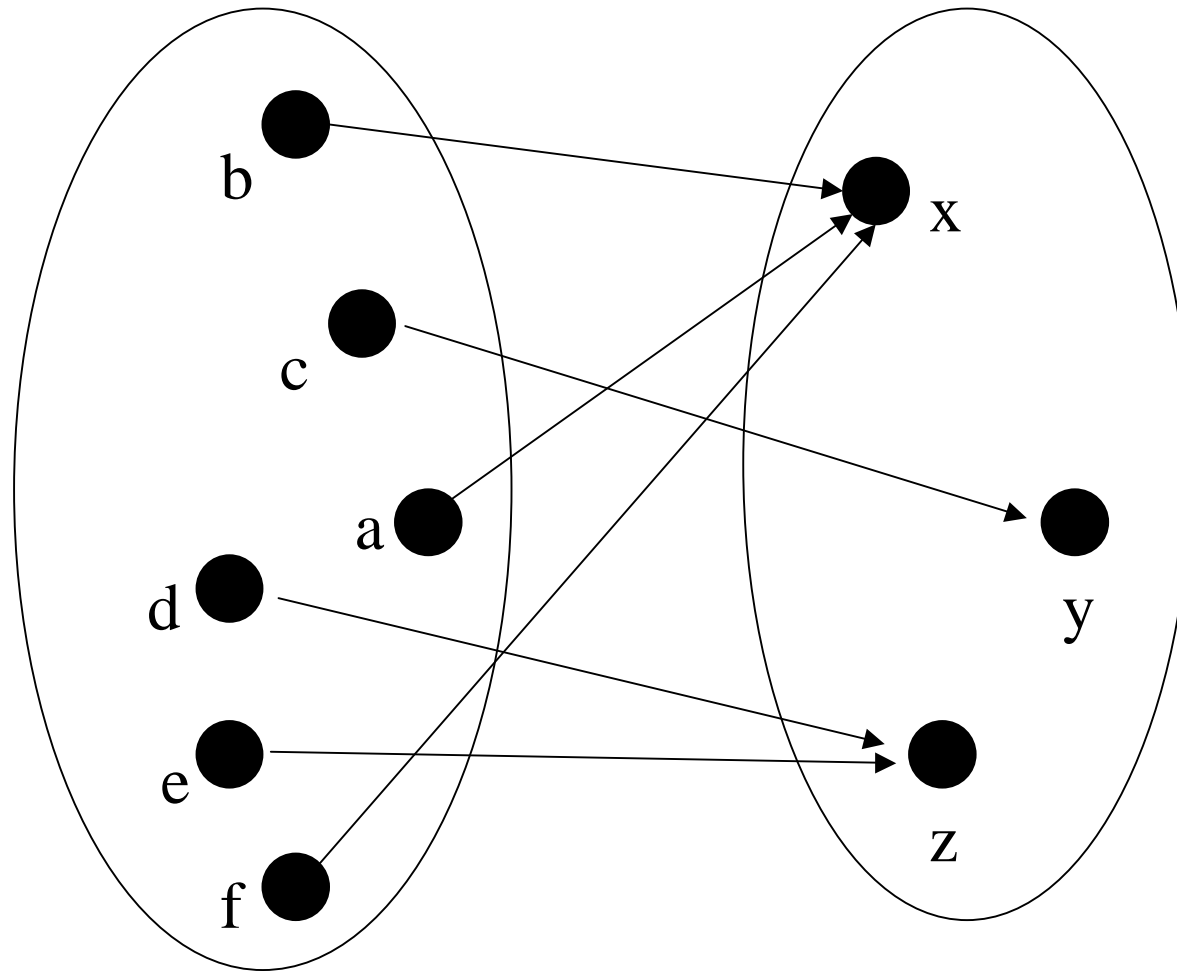
Codominio e immagine della funzione non coincidono.



**I punti neri definiscono
l'immagine dell'insieme A.**

CONTROIMMAGINE

Dato un elemento immagine, si dice *controimmagine* l'insieme di tutti gli elementi da cui proviene.



La controimmagine di x è $\{a, b, f\}$

La controimmagine di y è $\{c\}$

La controimmagine di z è $\{d, e\}$

Funzione iniettiva

Funzione suriettiva

Funzione biunivoca

FUNZIONE INIETTIVA

Una funzione si dice *iniettiva* se ogni elemento dell'immagine proviene da un unico elemento del dominio.

In altri termini, una funzione si dice iniettiva se la controimmagine di ogni elemento è costituita da un unico elemento.

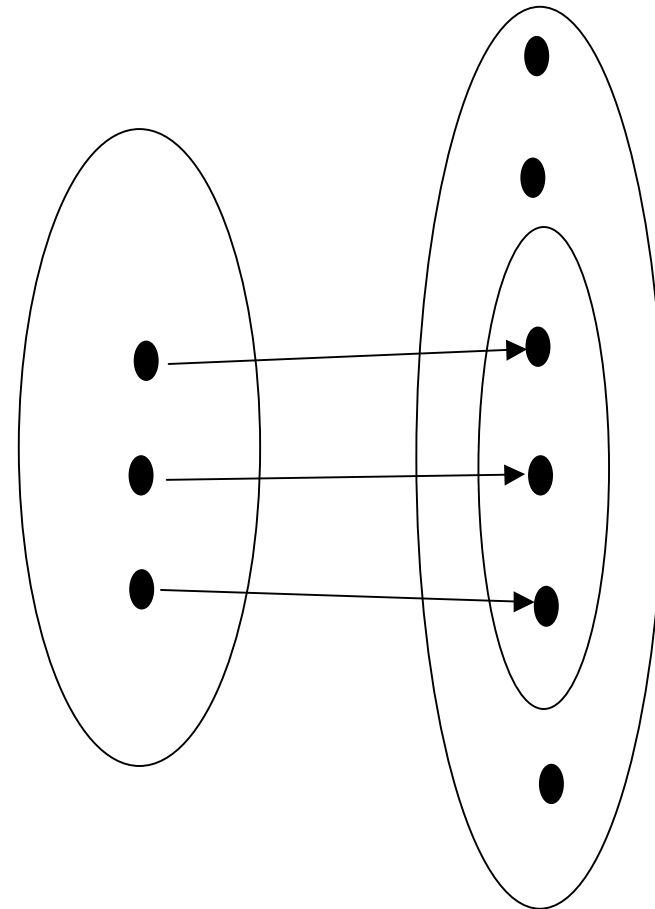
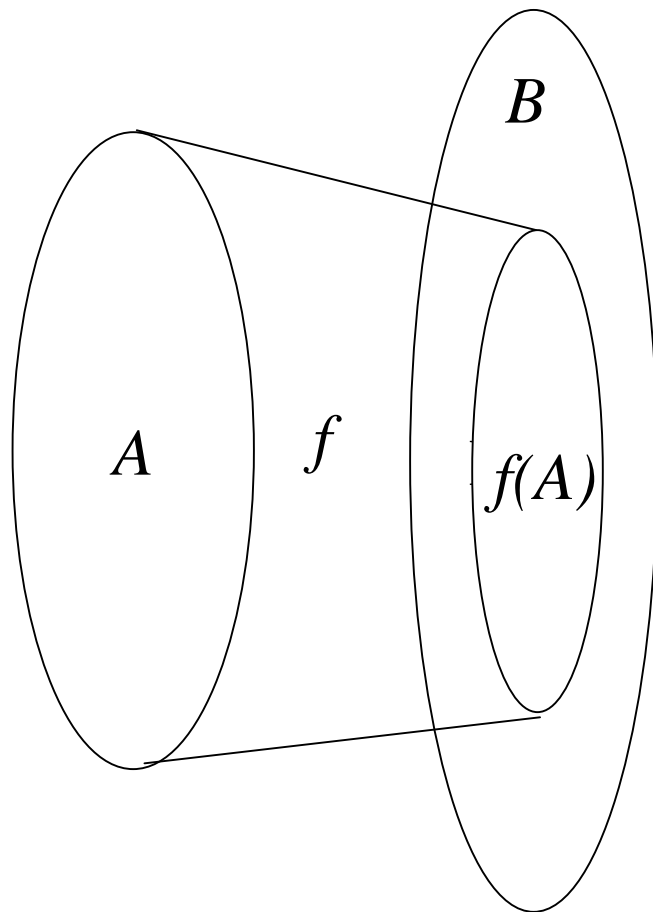
Esempio.

Sia P l'insieme delle pagine di un libro numerate da 1 a 200 e sia N l'insieme dei numeri naturali.

La funzione che associa a ogni pagine il suo numero è una funzione iniettiva di P in N .

L'immagine $f(P)$ è costituita dal sottoinsieme dei numeri naturali minori o uguali a 200. Ogni elemento dell'immagine (ciascuno dei numeri da 1 a 200) proviene da un'unica pagina, quella che riporta il numero considerato.

FUNZIONE INIETTIVA



FUNZIONE SURIETTIVA

Una funzione si dice *suriettiva* se la sua immagine coincide con l'intero codominio.

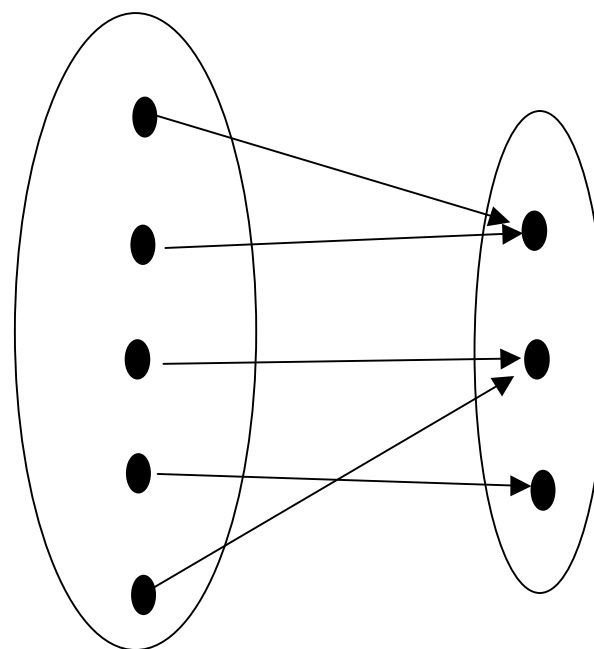
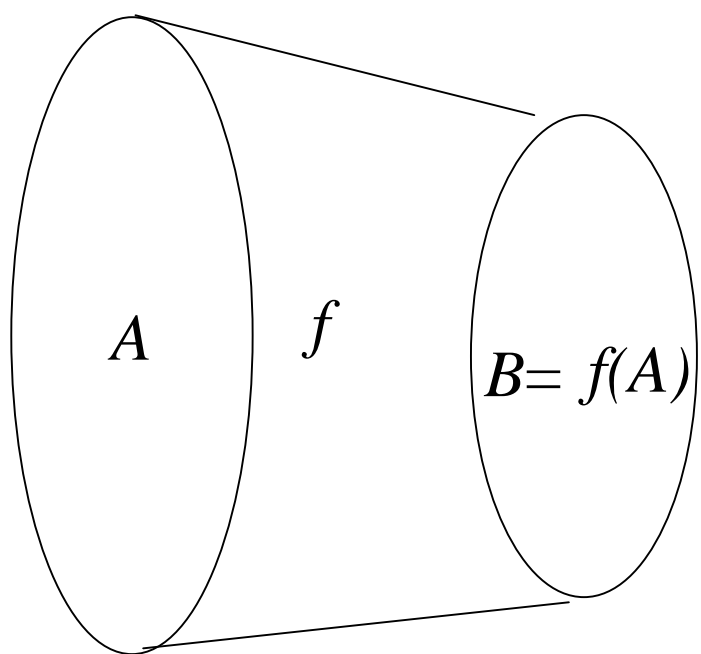
Esempio.

Sia S l'insieme degli studenti iscritti a una qualunque Università e F l'insieme di tutte le Facoltà dell'Università.

La funzione f che associa a ogni studente la Facoltà a cui è iscritto è una funzione suriettiva.

Infatti, presa una qualunque Facoltà (cioè un elemento del codominio F) esiste almeno uno studente (elemento del dominio) iscritto a quella Facoltà (non ci sono infatti Facoltà senza iscritti).

FUNZIONE SURIETTIVA



FUNZIONE BIUNIVOCA

Una funzione si dice *biiettiva* o una *corrispondenza biunivoca* se a ogni elemento del dominio corrisponde un unico elemento del codominio e viceversa.

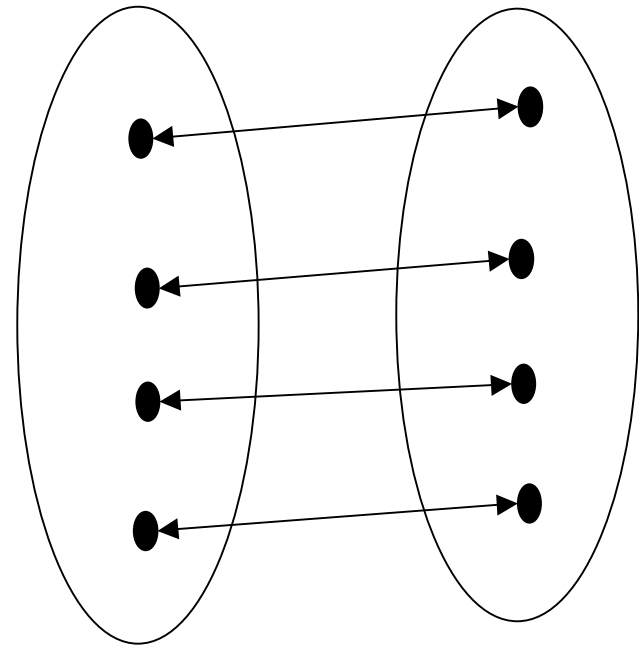
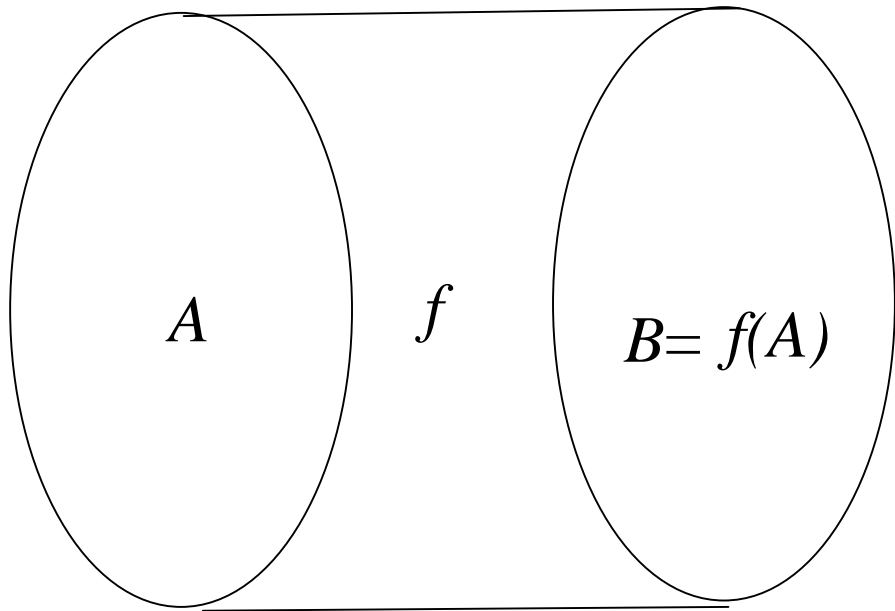
Una funzione è biunivoca se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Esempio.

Sia A l'insieme di tutte le automobili in circolazione
e T l'insieme di tutte le targhe automobilistiche.

La funzione f che associa a una automobile la sua
targa è una funzione biunivoca.

FUNZIONE BIUNIVOCA



ESERCIZI

La funzione f associa a ciascun numero reale a il suo cubo a^3 .
Che tipo di funzione è f ?

Sia P l'insieme delle persone che abitano in Italia e sia
 C l'insieme delle città italiane.

La funzione che associa a ogni persona la città in cui
risiede è una funzione iniettiva? E' una funzione
suriettiva?

La funzione f che associa a ciascun numero reale a il suo
quadrato a^2 è una funzione biunivoca?

FUNZIONI NUMERICHE

**FUNZIONI MONOTONE CRESCENTI/DECRESCENTI
IN SENSO STRETTO**

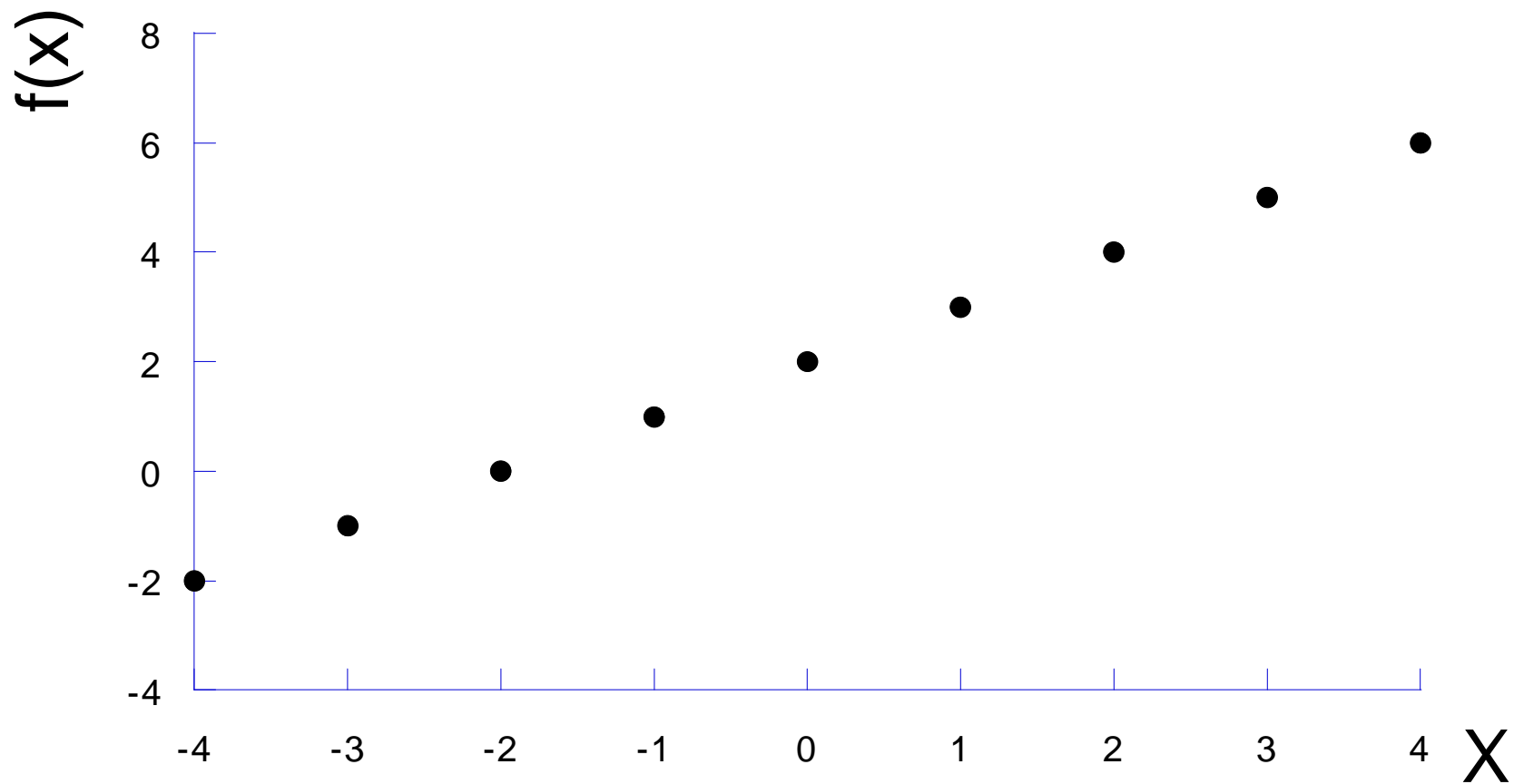
**FUNZIONI MONOTONE CRESCENTI/DECRESCENTI
IN SENSO LATO**

FUNZIONE MONOTONE CRESCENTE IN SENSO STRETTO

Una funzione numerica f di dominio D e codominio C si dice monotona crescente in senso stretto, allorché se x_1 e x_2 sono due elementi di D e $x_1 < x_2$, allora anche $f(x_1) < f(x_2)$.

$$f(x) = x + 2$$

$$X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

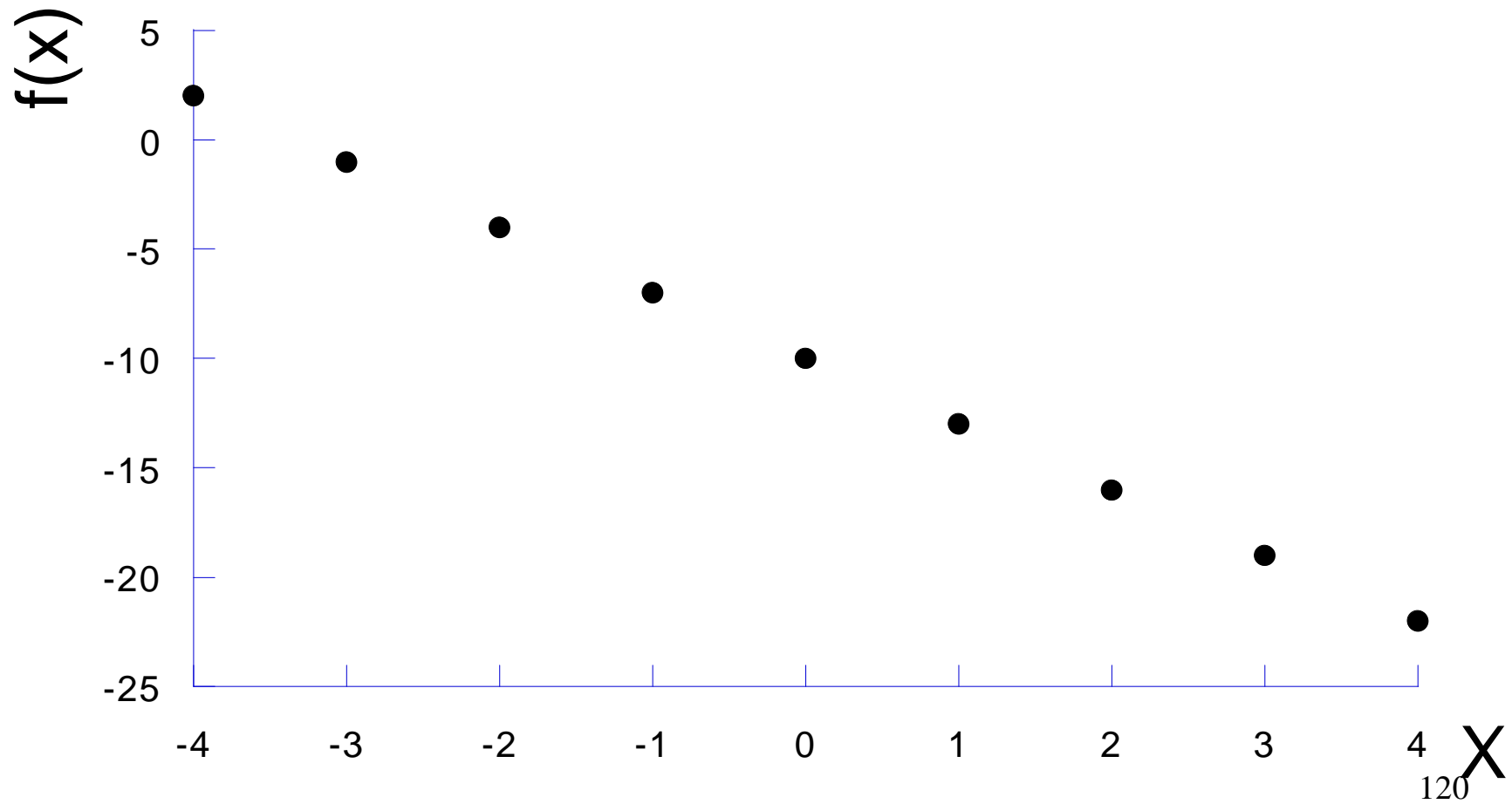


FUNZIONE MONOTONE DECRESCENTE IN SENSO STRETTO

Una funzione numerica f di dominio D e codominio C si dice monotona decrescente in senso stretto, allorché se x_1 e x_2 sono due elementi di D e $x_1 < x_2$, allora anche $f(x_1) > f(x_2)$.

$$f(x) = -3x - 4$$

$$X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$



FUNZIONE MONOTONE DECRESCENTE IN SENSO LATO

Una funzione numerica f di dominio D e codominio C si dice monotona crescente in senso stretto, allorché se x_1 e x_2 sono due elementi di D e $x_1 < x_2$, allora anche $f(x_1) \leq f(x_2)$.

FUNZIONE MONOTONE DECRESCENTE IN SENSO LATO

Una funzione numerica f di dominio D e codominio C si dice monotona decrescente in senso stretto, allorché se x_1 e x_2 sono due elementi di D e $x_1 < x_2$, allora anche $f(x_1) \geq f(x_2)$.

OPERAZIONE BINARIA

Si definisce operazione binaria in un insieme A ogni funzione che ad ogni coppia (a,b) appartenente a $A \times A$ associa uno e un solo elemento c appartenente a A .

Es. Nell'insieme dei numeri naturali, le quattro operazioni sono operazioni nel senso indicato dalla definizione.

L'addizione associa a ogni coppia di numeri naturali un terzo numero naturale chiamato somma.

SISTEMA RELAZIONALE

Si chiama *sistema relazionale* A ogni insieme A considerato con tutte le *relazioni* in esso definite.

L'insieme A si dice *dominio* del sistema relazionale.

Se indichiamo con R_1, R_2, \dots, R_n le relazioni in A , possiamo indicare il sistema con:

$$A = \langle A, R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

Esempio.

Sia A un insieme di figure geometriche di diversa estensione, forma e colore.

Si definiscano le seguenti relazioni, indicando con a e b due elementi di A :

$a R_1 b$ se e solo se a è di estensione minore di b

$a R_2 b$ se e solo se a e b hanno la stessa forma

$a R_3 b$ se e solo se a è più chiaro di b

Il sistema relazionale A sarà:

$$A = \langle A, R_1, R_2, R_3 \rangle$$

STRUTTURA

Dato un insieme A e un'operazione T interna in A , allora si dice che l'insieme è diventato una struttura:

$$A = \langle A, T \rangle$$

Esempio. L'insieme R dei numeri naturali assieme all'operazione di divisione è una struttura:

$$R = \langle R, : \rangle$$

Esempio. L'insieme S dei segmenti assieme all'operazione di addizione è una struttura:

$$S = \langle S, + \rangle$$

