Modello probabilistico di un esperimento aleatorio

Psicometria 1 - Lezione 6
Lucidi presentati a lezione

AA 2000/2001 dott. Corrado Caudek

Un ***esperimento*** è il processo attraverso il quale un’osservazione viene compiuta.

Esempio. Lanciare una moneta e osservare l'esito che produce (testa o croce), oppure lasciare cadere un oggetto e misurare il tempo che impiega a raggiungere il suolo.

Esperimento deterministico:

gli esiti dell'esperimento sono completamente predicibili.

Esempio. Se l'esperimento consiste nella misurazione del tempo impiegato da un oggetto a raggiungere il suolo, essendo note le condizioni iniziali del sistema e risolvendo le equazioni del moto è possibile predire con esattezza in ogni istante lo stato del sistema.

Esperimento aleatorio:

i singoli esiti dell'esperimento non sono predicibili con esattezza.

Esempio. Se l'esperimento consiste nel lancio di una moneta, non è possibile stabilire con certezza se l'esito di un singolo lancio sarà testa o croce.

Che cosa significa esattamente il termine “***aleatorio***”?

Il termine “aleatorio” viene usato con il significato di “non conosciuto” ma di per sé ben determinato, ovvero individuato senza possibilità di equivoco.

Un ***numero aleatorio***, indicato con una lettera maiuscola, per esempio X, è un numero il cui vero valore è uno solo ma, se lo si dice aleatorio, vuol dire che questo valore non è per noi conosciuto.

Esempio. Poniamo X = anno della morte di Cesare Battisti.

Il valore vero di X è 1916.

Finché Cesare Battisti era in vita, il valore di X non era noto a nessuno, ed erano valori possibili di X tutti gli anni a partire da quello della nascita.

Dopo la sua morte, il valore di X è aleatorio per chi lo ignora. Per esempio, per chi sapesse che la morte di Cesare Battisti avvenne durante la prima guerra mondiale, i valori possibili sarebbero quattro: 1915, 1916, 1917, 1918. (*De Finetti*)

Una volta chiarito che cosa si intende con “esperimento” dobbiamo trovare un modo per descrivere i risultati possibili che un esperimento può produrre.

Eventi: chiamiamo *evento* l'insieme costituito da uno o più dei possibili risultati o esiti di un esperimento aleatorio.

Esempio. Nel caso dell'esperimento costituito dal lancio di un dado possono essere osservati i seguenti eventi.

A: "si osserva un numero dispari";

B: "si osserva un numero minore di 3";

E_i: "si osserva il numero i, con $i = 1, 2, \ldots, 6$".

Gli eventi possono essere divisi in due classi:

semplici e composti.

Gli **eventi semplici** sono costituiti da uno solo dei possibili risultati di un esperimento aleatorio.

Gli eventi semplici vengono denotati dalla lettera *E*.

Gli **eventi composti** sono costituiti da da più di uno dei possibili risultati di un esperimento aleatorio.

Un evento composto può sempre essere scomposto in eventi semplici. Se un evento non risulta ulteriormente scomponibile è per definizione un evento semplice.

Esempio. Nel caso dell'esperimento costituito dal lancio di un dado possono essere osservati i seguenti eventi.

A: “si osserva un numero dispari”;
B: “si osserva un numero minore di 3”;
E_i: “si osserva il numero i, con $i = 1, 2, \dots, 6$”.

Se viene osservato l'evento A, allo stesso tempo verrà osservato l'evento E_1, E_3 o E_5. L'evento A può quindi essere scomposto nei termini di altri tre eventi ed è chiamato *composto*.

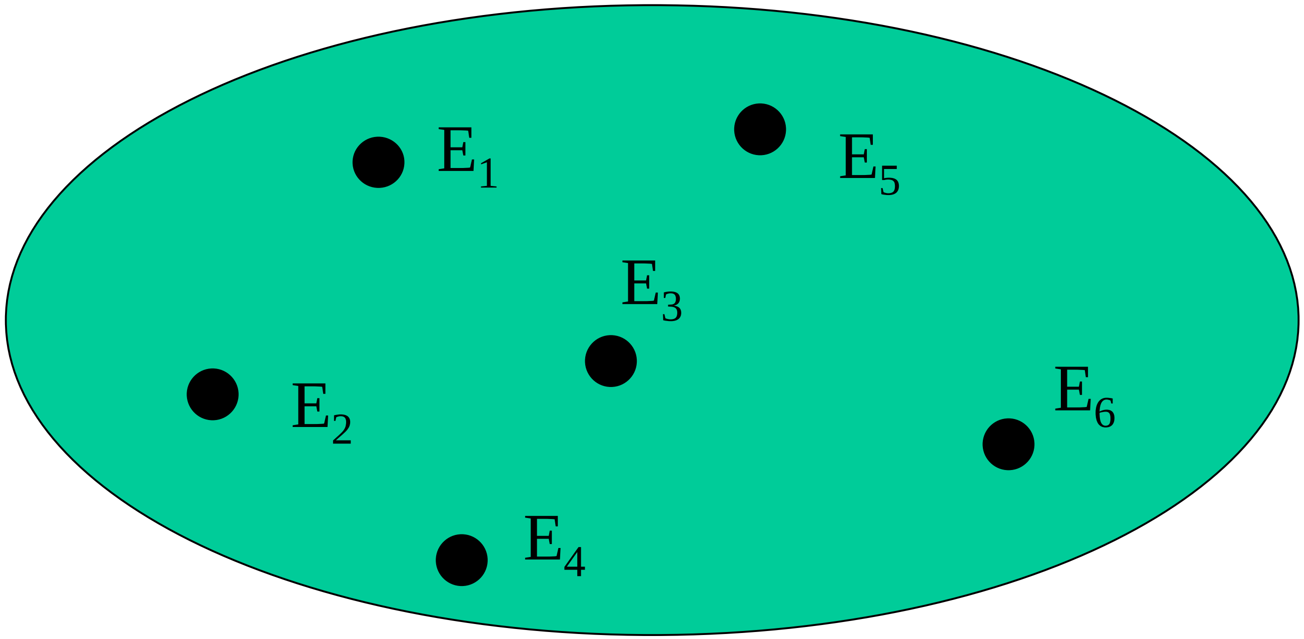
Gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, invece, non possono essere scomposti e sono detti *semplici*.

Spazio campione. L'insieme costituito da tutti gli eventi semplici è detto *spazio campione* e ciascun evento semplice è anche detto *punto campione*.

Lo spazio campione associato ad un esperimento verrà denotato dalla lettera S.

Esempio. Nel caso del lancio del dado, lo spazio campione S è l'insieme dei punti campione associati ai sei eventi semplici E_i, con $i = 1, 2, \ldots, 6$:

$S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$



Nel caso dell'esperimento consistente nel misurare, con uno strumento infinitamente preciso, il livello di piovosità in una certa area geografica, lo spazio campione è

$$S = \{E_1, E_2, ...\}$$

perché, all'interno di una certa gamma di valori, nessun numero reale può essere escluso come risultato possibile dell'esperimento.

In questo caso, lo spazio S contiene un insieme infinito non numerabile di punti campione.

Si possono distinguere tre tipi di spazio campione:

- spazio campione *finito*

- spazio campione *infinito numerabile*

- spazio campione *infinito non numerabile*

Lo spazio campione finito è costituito da un numero finito di elementi.

Esempio. Un bambino colleziona figurine facenti parte di una collezione di 100 illustrazioni. In questo caso lo spazio campione è finito e prevede i 100 punti campione corrispondenti a ciascuna figurina.

Si dice <u>infinito numerabile</u> uno spazio il cui numero di punti campione sia in corrispondenza biunivoca con l'intero sistema dei *numeri naturali*.

A ogni punto campione può dunque essere associato un numero naturale.

Esempio. Uno psicologo che osservi il numero di pazienti che si presentano ad un centro di igene mentale compie un esperimento i cui risultati possibili costituiscono uno spazio campione *infinito numerabile*.

Infatti, prolungando la sua osservazione lo psicologo può notare il presentarsi di altre persone in aggiunta a quelle già osservate.

Verifica perciò un numero sempre maggiore di pazienti che però è in grado di enumerare. Ciascun paziente constituisce uno dei risultati possibili dello spazio campione infinito numerabile.

Si dice infinito non numerabile uno spazio campione i cui eventi semplici sono tali per cui, fissati due di essi, è sempre possibile determinarne almeno un terzo intermedio.

Esempio. Lo spazio costituito dagli eventi "esatto momento della nascita" è uno spazio infinito non numerabile. Infatti, prese due qualunque persone nate ognuna in un certo momento, è sempre possibile individuarne una terza la cui nascita si colloca tra le due precedenti.

Lo spazio campione associato ad un esperimento si dice ***discreto*** se è uno spazio finito o infinito numerabile.

Lo spazio campione si dice ***continuo*** se è uno spazio infinito non numerabile.

Quando un esperimento viene eseguito, uno e un solo evento semplice può essere osservato. Gli eventi semplici, dunque, sono mutuamente esclusivi.

Gli eventi mutuamente esclusivi possono essere rappresentati da <u>insiemi disgiunti</u>.

Esempio. Se il lancio del dado produce l'esito 5, non è possibile osservare allo stesso tempo l'esito 6.

Gli eventi E_5 e E_6, quindi, sono mutuamente esclusivi, così come tutti gli altri eventi semplici.

Gli eventi composti non sono di necessità mutuamente esclusivi, in quanto qualsiasi sottoinsieme dello spazio campione può costituire un evento composto.

Esempio. L'evento A (*esito dispari*) ha luogo se si osserva E_1 o E_3 o E_5.

L’evento B (*numero minore di 3*) ha luogo se si osserva E_1 o E_2.

Gli eventi A e B, quindi, non sono mutuamente esclusivi.

… poniamoci ora il problema di costruire un modello probabilistico per un esperimento.

SPAZIO PROBABILISTICO FINITO

Un ***modello probabilistico di un esperimento*** con uno spazio campione finito $S = \{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n\}$ si costruisce assegnando una numero reale P_i, chiamato la probabilità di E_i, a ciascun evento semplice dello spazio campione S.

Per definire la nozione di “*modello probabilistico*” di un esperimento abbiamo fatto ricorso alla nozione di probabilità.

Ma quale è il significato che diamo al termine “*probabilità*”?

L’interpretazione più semplice della nozione di probabilità è quella frequentista.

Gli eventi aleatori (come il lancio di un dado) non possono essere predetti con certezza, ma la ***frequenza relativa*** con la quale hanno luogo ***a lungo andare*** è notevolmente stabile.

La frequenza relativa dell’occorrenza di un evento aleatorio all’interno di una serie di prove di grandi dimensioni fornisce una *misura* della nostra certezza a proposito del verificarsi di quell’evento.

In base all’impostazione frequentista, per ***probabilità*** di un evento si intende il limite a cui tende la frequenza relativa delle prove in cui l’evento si verifica, quando il numero di prove tende all’infinito:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s}{n} = p$$

con *s* = numero di “successi” e *n* = numero di prove.

Nel caso di uno spazio campione finito S, un numero $P(A)$, chiamato *probabilità* di A, può essere assegnato a ciascun evento A (laddove A è un sottoinsieme di S) se le seguenti condizioni vengono rispettate:

1. $P(A) \geq 0$

2 Se A_1, A_2, …, A_m sono eventi mutuamente esclusivi all'interno di S, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

3 Se lo spazio campione è costituito da n eventi semplici

(cioè mutuamente esclusivi), allora

$$P(S) = P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 1$$

Il primo dei vincoli precedenti può essere riformulato dicendo che la frequenza relativa deve essere maggiore o uguale a zero -- frequenze relative negative, infatti, non hanno senso.

Il secondo vincolo può essere riformulato dicendo che la frequenza relativa dell'unione di due o più eventi mutuamente esclusivi è uguale alla somma delle rispettive frequenze relative.

In base al terzo vincolo, la somma delle frequenze relative di tutti gli eventi semplici dello spazio campione deve essere uguale a 1.

Esempio. Supponiamo di eseguire l'esperimento consistente nel lancio di un dado non truccato.

Lo spazio campione di questo esperimento è costituito dai seguenti eventi semplici:

$$\boldsymbol{S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}}$$

laddove

$$E_1 : \{1\},\ E_2 : \{2\},\ E_3 : \{3\},\ E_4 : \{4\},\ E_5 : \{5\},\ E_6 : \{6\}$$

Possiamo assumere che, a lungo andare, tutti gli eventi semplici dello spazio campione avranno la stessa frequenza relativa.

A ciascun evento semplice può dunque essere assegnata la probabilità di 1/6:

$$P(E_i) = \frac{1}{6}, \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots, 6$$

Infatti, in base all'impostazione frequentista

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s}{n} = p$$

Assegnando una probabilità di 1/6 a ciascun evento semplice risulta soddisfatto il primo dei vincoli precedenti:

$$P(A) \geq 0$$

Il terzo dei vincoli precedenti

$$P(S) = P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 1$$

è soddisfatto in quanto

$$P(S) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_6) = 1$$

Il secondo vincolo ci dice che possiamo calcolare le probabilità di nuovi eventi composti sommando le probabilità degli eventi semplici in essi contenuti.

Ad esempio, la probabilità di osservare l'evento "il lancio del dado produce un numero dispari" sarà:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(E_1 \cup E_3 \cup E_5) \\
&= P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) = \\
&= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2
\end{aligned}
$$

Esempio. Consideriamo l'esperimento costituito dall'estrazione di una gettone da un'urna contenente 10 gettoni. Di questi, 5 sono bianchi, 3 rossi e 2 neri.

Definiamo 3 eventi composti:

l'evento A ha luogo quando un gettone bianco viene estratto,
l'evento B ha luogo quando un gettone rosso viene estratto,
l'evento C ha luogo quando un gettone nero viene estratto.

Ciascuno di questi 3 eventi costituisce un sottoinsieme dello spazio campione S.

L'evento *A* ("***un gettone bianco è stato estratto***") si verifica quando viene osservato uno di 5 eventi semplici di *S* (ovvero, quando viene estratto uno dei 5 gettoni bianchi).

L'evento *B* ("***un gettone rosso è stato estratto***") si verifica quando viene osservato uno di 3 eventi semplici di *S* (ovvero quelli corrispondenti all'estrazione di un gettone rosso).

L'evento *C* ("***un gettone nero è stato estratto***") si verifica quando viene osservato uno di 2 eventi semplici di *S* (ovvero quelli corrispondenti all'estrazione di un gettone nero).

Supponiamo che ciascun gettone abbia la stessa probabilità di essere estratto dall’urna.

Quale è la probabilità di osservare l'evento A "un gettone rosso viene estratto dall'urna?"

Abbiamo definito la probabilità dell'evento A "un gettone rosso è stato estratto" come la somma delle probabilità di tutti gli eventi semplici che lo costituiscono.

Dato che a ciascuno degli eventi semplici dello spazio campione abbiamo assegniamo la probabilità di 1/10, ne segue che

$$P(\mathit{estrarre\ un\ gettone\ rosso}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

dato che ci sono 3 gettoni rossi.

Allo stesso modo, $P(\mathit{bianco}) = .5$ e $P(\mathit{nero}) = .2$.

$P(rosso) = .3 \quad P(bianco) = .5 \qquad P(nero) = .2.$

$$P(rosso \cup bianco) = \; .3 + .5 = .8$$

$$P(rosso \cap bianco) = \; 0$$

$$P(rosso \cup nero) = \; .3 + .2 = .5$$

$$P(rosso \cup bianco \cup nero) = \; 1.0$$

Esempio Si considerino i seguenti esperimenti.

1. Un elezione decide tra due possibili candidati, A e B.
2. Una moneta viene lanciata.
3. Si chiede a uno studente quale è il mese dell'anno in cui solitamente va in vacanza.
4. Uno studente viene scelto a caso da un gruppo di studio composto da 10 studenti.
5. Il voto finale ricevuto alla fine di questo corso da uno di voi.

A quali casi del presente esempio sarebbe ragionevole assegnare una distribuzione uniforme di probabilità?

(2, 4)

Esempio. Tre studenti fanno domanda per una borsa di studio. Soltanto una borsa può essere assegnata. A e B hanno la stessa probabilità di ottenere la borsa mentre la probabilità di vittoria di C vinca è solo la metà della probabilità della vittoria di A o B.

Si trovi la probabilità che vinca il candidato A oppure il candidato C, ovvero, la probabilità dell'evento $E = \{A, C\}$.

Lo spazio campione può essere immaginato come l'insieme $\{A, B, C\}$ in cui ciascun elemento corrisponde alla vittoria di un determinato studente.

$$P(A) = P(B) = 2\,P(C)$$
$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$2\,P(C) + 2\,P(C) + P(C) = 1$$
$$5\,P(C) = 1$$

$P(C) = 1/5,$ $\quad P(B) = 2/5 \quad P(A) = 2/5$

$$P(E) = P(A) + P(C) = 3/5$$

Esempio. Tra i tre possibili corsi complementari di astronomia, fisica e matematica, uno studente deve sceglierne due per il suo piano di studi.

La probabilità che lo studente scelga astronomia è 5/ 8;
la probabilità che lo studente scelga fisica è 5/ 8.
La probabilità che lo studente scelga astronomia e fisica insieme è 1/ 4.

Si trovi
(1) la probabilità che lo studente scelga matematica;
(2) la probabilità che lo studente scelga astronomia o fisica.

Lo spazio campione per le possibili scelte è *{af, am, mf}*.
Quindi la probabilità di *(a,f) + (a,m) + (m,f) = 1*

(1) Sappiamo che la probabilità di (*a,f*) è 1/ 4.
Ne segue che la probabilità che scelga matematica sarà 3/ 4.

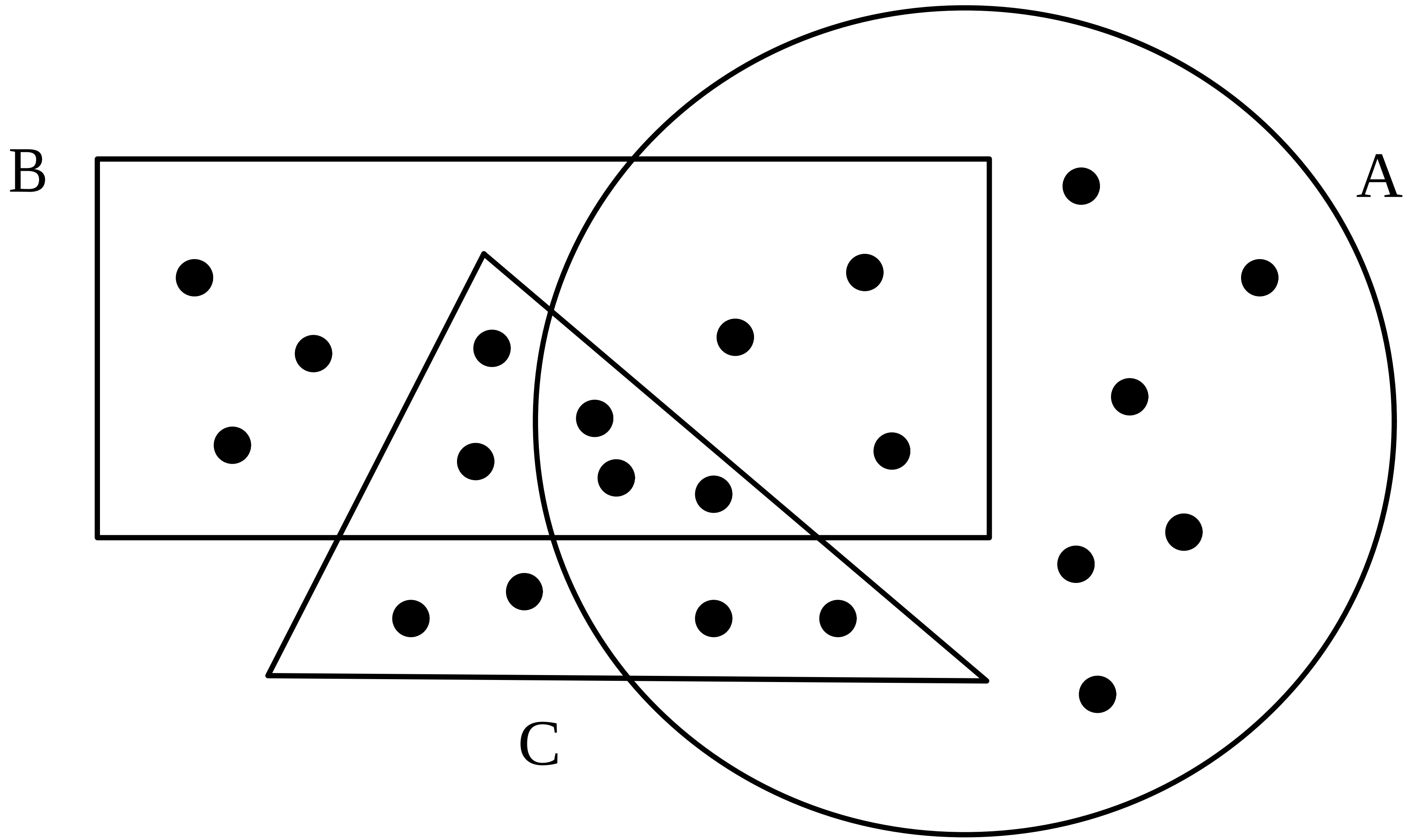
(2) *P(a o f) = P(a) + P(f) - P(a e f) = 5/8 + 5/8 - 1/4 = 1*

ESERCIZI

E1. Un archeologo studia tre aree geografiche contenenti i siti di antichi villaggi.

L'area racchiusa da un cerchio rappresenta l'influenza della cultura *A*, l'area rettangolare rappresenta l'influenza della cultura *B* e l'area triangolare rappresenta l'influenza della cultura *C*.

I punti all'interno di ciascun area rappresentano i possibili siti dei villaggi. Supponiamo che l'archeologo esamini uno di questi siti a caso.


B
A
C

1. Quale è la probabilità che il sito esaminato sia stato influenzato da una sola cultura?

2. Quale è la probabilità che il sito selezionato sia stato influenzato da due culture?

3. Quale è la probabilità che il sito selezionato sia stato influenzato da più di una cultura?

E2. Un candidato deve scegliere a caso una di 6 buste contendenti diversi temi da svolgere. Si trovi:

(1) la probabilità che il candidato scelga la prima, la terza oppure la quinta busta.

(2) la probabilità che il candidato scelga la prima oppure l'ultima busta.

E3. Una carta viene estratta da un mazzo ben mescolato di carte da poker. Si trovi la probabilità che la carta estratta sia:

(1) una carta di fiori
(2) un re
(3) re di fiori
(4) un re oppure un fante
(5) un re oppure una carta di cuori
(6) un 7 oppure un 8 oppure un 9
(7) una carta di cuori o quadri o picche o fiori
(8) una carta dispari che non sia re, donna, fante.

E4. In un ufficio ci sono i seguenti membri:

Nome	***Sesso***	***Capelli***	***Peso***
Maria	**F**	**biondi**	**63**
Susanna	**F**	**bruni**	**66**
Gianna	**F**	**biondi**	**65**
Alice	**F**	**rossi**	**68**
Eleonora	**F**	**bruni**	**67**
Giovanni	**M**	**bruni**	**71**
Loretta	**F**	**biondi**	**63**
Giacomo	**M**	**rossi**	**70**
Enrico	**M**	**biondi**	**73**

Ciascun membro dell'ufficio ha la stessa probabilità di ottenere una promozione. Si trovi la probabilità che la promozione venga ottenuta da

(1) una donna

(2) una persona con i capelli bruni

(3) un maschio con i capelli rossi

(4) una donna bionda con un peso minore di 65 chilogrammi

Calcolo della probabilità di un evento: metodo del punto campione

1) Definire l'esperimento.

2) Elencare tutti gli esiti possibili dell'esperimento, ovvero tutti gli eventi semplici che costituiscono lo spazio campione, accertandosi che non possano essere decomposti.

3) Assegnare un valore di probabilità a ciascuno degli eventi semplici dello spazio campione in modo tale che $P(E_i) \geq 0$ e $\sum P(E_i) = 1$.

4) Definire l'evento di interesse, A, come uno specifico insieme di punti campione. Controllare tutti i punti campione di S per stabilire quali di essi stanno in A.

5) Determinare $P(A)$ sommando i valori di probabilità associati agli eventi semplici che costituiscono l'insieme A.

Esempio. Due candidati vengono selezionati da un gruppo di cinque per essere assunti da un'azienda. Le competenze dei candidati (non conosciute dall'azienda) sono variabili e possono essere descritte assegnando il valore 1 al candidato più capace, 2 al secondo più capace e così via. Si definiscano due eventi A e B tali per cui:

$\boldsymbol{A}$: vengono assunti il candidato migliore e uno dei due peggiori (ovvero, i candidati 1 e 4 o 5);

$\boldsymbol{B}$: viene assunto almeno uno dei due candidati migliori.

Si trovino le probabilità $P(A)$ e $P(B)$.

1 L'esperimento consiste nella selezione casuale di 2 candidati su 5.

2 Ciascun evento semplice di questo esperimento può essere denotato con $\{i, j\}$, laddove i e j indicano i due candidati prescelti. I dieci eventi semplici di questo esperimento sono:

$$E_1 : \{1,2\},\ E_2 : \{1,3\},\ E_3 : \{1,4\},\ E_4 : \{1,5\},\ E_5 : \{2,3\},$$

$$E_6 : \{2,4\},\ E_7 : \{2,5\},\ E_8 : \{3,4\},\ E_9 : \{3,5\},\ E_{10} : \{4,5\}.$$

3 Se la selezione di due candidati su cinque avviene in maniera casuale, allora tutti gli eventi semplici dello spazio campione hanno uguale probabilità. A ciascun punto campione viene quindi assegnata una probabilità uguale a 1/ 10:

$$P(E_i) = 1/10, \text{ con } i = 1,2,...,10$$

4 L'esame di ciascuno degli eventi semplici di S rivela che l'evento B si verifica quando si osservano gli eventi semplici

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 \text{ o } E_7.$$

Questi punti campione vengono dunque inclusi in B.

5 La probabilità dell'evento composto B si calcola sommando le probabilità che sono associate a tutti i punti campione contenuti in B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{7} P(E_i) = \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

In maniera simile si può stabilire che l'evento A corrisponde all'unione degli eventi E_3 e E_4. Quindi

$$P(A) = \frac{2}{10}$$

Esempio Supponete di volere effettuare una scommessa in condizioni favorevoli, ovvero nelle condizioni in cui la probabilità di vincere sia maggiore di 0.5.

Quante persone devono esserci in una stanza affinché sia vantaggioso scommettere che vi sono almeno due persone che hanno lo stesso compleanno?

Assumiamo che ci siano 365 possibili compleanni (ignoriamo gli anni bisestili). Il compleanno del primo individuo ha 365 possibilità, lo stesso per il secondo individuo e così via. Supponiamo che ci siano *k* individui. In totale, dati *k* individui, ci sono 365^k possibili compleanni.

Troviamo il numero di sequenze in cui **non** c'è nessuna duplicazione di compleanni.

Per fare questo, poniamo che il primo individuo abbia il compleanno in uno qualsiasi di 365 giorni, il secondo individuo in uno qualsiasi dei 364 giorni rimanenti, il terzo in uno qualsiasi dei 363 giorni rimanenti e così via fino a che non abbiamo esaurito *k* scelte.

Per l'individuo k ci saranno $365 - k + 1$ possibilità. Il numero totale di sequenze **senza duplicazioni**, dunque, è

365 ´ 364 ´ 363 ´ (365 - k + 1).

Assumendo che ciascuna sequenza sia egualmente probabile, la probabilità di non avere alcuna duplicazione di compleanni dati k individui è:

$$p_k = \frac{365 \times 364 \times ... \times (365 - k + 1)}{365^k}$$

Eseguendo questo calcolo si trova, ad esempio,

k = 10, p =.883,
k=20, p = .588,
k = 30, p = .294,
k = 100, p = .0000003.

Con *k* = 22, *p* = .524, con *k* = 23, *p* = .493.

La probabilità di **assenza di duplicazione** di compleanni cambia dunque da più di 0.5 a meno di 0.5 con *k* tra 22 e 23.

In conclusione, la scommessa che ci siano almeno due compleanni uguali diventa favorevole con appena 23 individui.

Esempio. In un ufficio lavorano 4 persone. Si trovi la probabilità che tutte e 4 abbiano il compleanno nello stesso mese.

$$\left(\frac{1}{12}\right)^4 \binom{12}{1}$$

Si trovi la probabilità che tutte e 4 abbiano il compleanno in mesi diversi (ovvero che non vi siano due o più persone che abbiano il compleanno nello stesso mese)

$$\frac{\binom{12}{4}}{(12)^4}$$

Si trovi la probabilità che due o più persone abbiano il compleanno nello stesso mese

$$1-\frac{\binom{12}{4}}{(12)^4}=.976$$

ESERCIZI

E5. Supponete che ci siano 6 carte (A, B, C, D, E, F) e che 2 individui scelgano una di esse in maniera indipendente.

Quale è la probabilità che i due individui scelgono due carte diverse?

Quale è la probabilità che 3 individui scelgano 3 carte diverse?

Quale è la probabilità che 4 individui scelgano 4 carte diverse?

E6. Cinque persone prendono un ascensore che si ferma in ciascuno di 5 piani. Assumiamo che la probabilità di scendere in qualsiasi piano sia la stessa.

Calcolate la probabilità che le 5 persone scendano tutte a piani diversi.

E7. 10 studenti vengono scelti in maniera casuale a partire da un gruppo di 50 studenti per un esperimento. Tra questi 50 studenti, 15 giocano a tennis, 18 giocano a basket, 10 giocano a pallavolo e 7 giocano a rugby. Si la probabilità che

(1) tutti i 10 studenti prescelti giochino a basket

(2) tra i 10 studenti prescelti ci siano 7 giocatori di rugby e 3 giocatori di pallavolo

(3) tra i 10 giocatori prescelti ci siano 3 giocatori di tennis, 4 giocatori di basket, 2 giocatori di pallavolo e un giocatore di rugby.

(fornite le risposte in forma simbolica)