PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Psicometria 1 - Lezione 7
Lucidi presentati a lezione

AA 2000/2001 dott. Corrado Caudek

La **probabilità non condizionata** dell’evento “*piove in un dato giorno*”, senza considerare nessun altro evento, è uguale alla numero di giornate in cui ha piovuto rispetto al numero totale di giornate considerate.

Supponiamo ora di considerare l’evento: “*piove domani*”, nel caso in cui sia piovuto tre giorni di seguito e il cielo sia completamente annuvolato.

In questo secondo caso, la **probabilità** di pioggia è **condizionata** dall’occorrenza di altri eventi (ha piovuto negli ultimi giorni, è nuvoloso, …) e potremmo aspettarci che questa seconda probabilità sia molto maggiore della probabilità non condizionata considerata in precedenza.

In un certo senso tutte le probabilità sono probabilità condizionate. Quando specifichiamo le circostanze e le assunzioni che stanno alla base di un esperimento, non facciamo altro che definire certe specifiche condizioni.

Per esempio, quando ci chiediamo quale è la probabilità di estrarre un re da un mazzo ben mescolato, allora limitiamo lo spazio campione a quegli eventi che soddisfano la condizione di essere "mazzi di carte ben mescolati".

Dunque, invece di dire P(re) potremmo dire P(re | mazzo ben mescolato di carte).

Solitamente, però, diamo per scontato il fatto che ci prendiamo in considerazione solo gli eventi che soddisfano certe condizioni e non esprimiamo in forma esplicita le condizioni considerate.

Per prendere delle decisioni, solitamente utilizziamo delle informazioni del tipo "se una certa situazione si verifica, allora la probabilità che un dato evento abbia luogo ha un certo valore".

Le probabilità condizionate, dunque, sono importanti perché hanno un ruolo di rilievo nei nostri processi decisionali.

Esempio. La probabilità non condizionata del verificarsi dell'esito "1" nel lancio di un dado bilanciato è 1/6.

La probabilità condizionata di "1" ***se il lancio del dado ha prodotto un esito dispari*** è 1/3 (dato che gli esiti "1", "3" e "5" hanno luogo con eguale frequenza).

EVENTI CONGIUNTI

Un ***evento congiunto*** *AÇB* è un evento composto che ha la proprietà di essere costituito da un insieme di eventi semplici, ciascuno dei quali appartiene sia all’insieme *A* che all’insieme *B*.

La probabilità di un evento congiunto *AÇB* si calcola nello stesso modo in cui si calcola la probabilità di qualsiasi evento composto: facendo la somma di tutti gli eventi elementari che lo compongono.

EVENTI EQUIPROBABILI

Nel caso di uno ***spazio campione finito costituito da eventi elementari equiprobabili***, la probabilità *P(AÇB)* è uguale a:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{numero di eventi semplici in } A \cap B}{\text{numero totale di eventi semplici}}$$

Oltre a *A Ç B*, si possono definire i seguenti eventi congiunti:

AÇ B’ Tutti gli eventi elementari in *A* e non in *B*.

A’Ç B Tutti gli eventi elementari in *B* e non in *A*.

A’Ç B’ Tutti gli eventi elementari che non sono né in *A* né in *B*.

I 4 eventi congiunti definiti sopra sono mutuamente esclusivi? SI

p(AÇB) + p(AÇB’) **=** ***p(A)***

p(AÇB) + p(A’ÇB) **=** ***p(B)***

p(A’ÇB) + p(A’ÇB’) **=** ***p(A’)***

p(AÇB’) + p(A’ÇB’) **=** ***p(B’)***

Esempio. Sia *A* “donna”, *B* “mancino”.

Siano *p(A)* = .51, *p(B)* = .35 e *p(AÇB)* = .10

Quale è la probabilità di osservare una donna oppure un mancino?

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= .51 + .35 - .10 = .76$$

Quale è la probabilità di osservare una donna non mancina?

p(AÇB')

p(A) = p(AÇB) + p(AÇB')

p(AÇB') = p(A) - p(AÇB)

= .51 - .10 = .41

Quale è la probabilità di osservare un uomo mancino?

p(A'ÇB)

p(B) = p(AÇB) + p(A'ÇB)

p(A'ÇB) = p(B) - p(AÇB)

= .35 - .10 = .25

Quale è la probabilità di osservare un uomo non mancino?

p(A’ÇB’)

p(A’) = p(A’ÇB) + p(A’ÇB’)

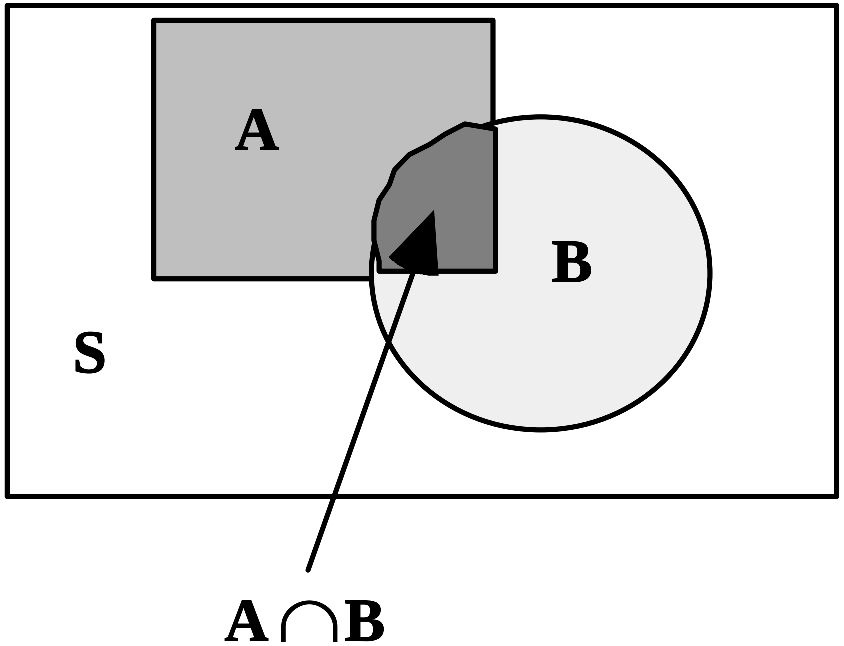
p(A’ÇB’) = p(A’) - p(A’ÇB)

= .49 - .25 = .24

DEFINIZIONE
DI PROBABILITA' CONDIZIONATA

Dati due eventi *A* e *B*, con *P(B)* > 0, la probabilità condizionata dell’evento *A* dato *B* è uguale a

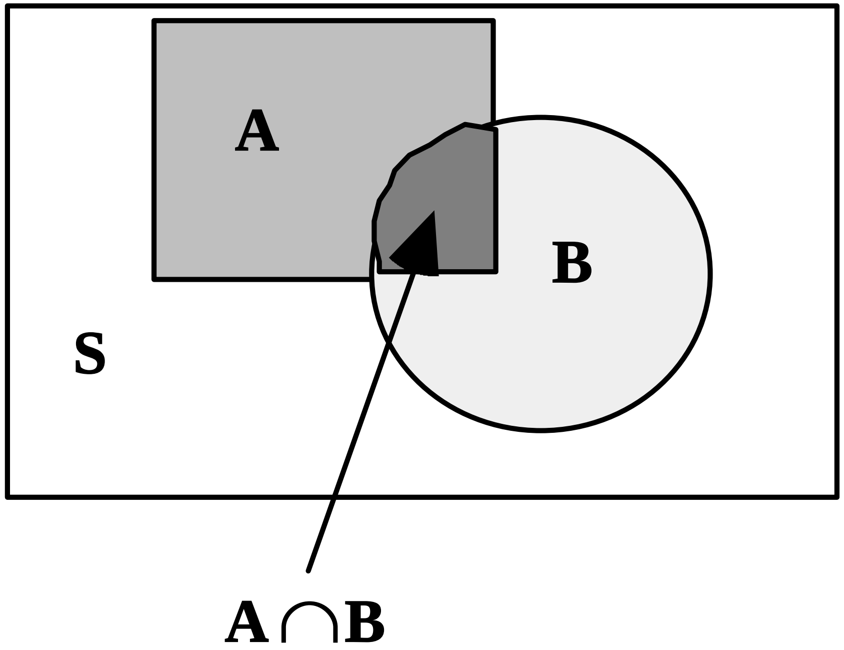
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$P(A|B)$ rappresenta la probabilità di $A \cap B$ rispetto allo spazio ridotto di B.

Dati due eventi *A* e *B*, si possono definire due probabilità condizionate:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad\qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



P(B|A) rappresenta la probabilità di $A \cap B$ rispetto allo spazio ridotto di *A*.

EVENTI EQUIPROBABILI

Nel caso di uno ***spazio campione finito costituito da eventi elementari equiprobabili***, la probabilità *P(A|B)* è uguale a:

$$P(A\,|\,B) = \frac{\text{numero di elementi di } A \cap B}{\text{numero di elementi di } B}$$

Esempio. Supponiamo che un quesito con risposte possibili "si" e "no" sia stato rivolto a 34 studenti, 18 maschi e 16 femmine. I risultati sono i seguenti:

	Maschi	Femmine	
SI	10	4	14
NO	8	12	20
	18	16	*34*

Supponiamo di *estrarre a caso* uno studente da questo gruppo e definiamo le seguenti probabilità:

$$P(M) = \frac{18}{34}$$

$$P(S) = \frac{14}{34}$$

$$P(M \cap S) = \frac{10}{34}$$

$$P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}$$

$$P(M \mid S) = \frac{10/34}{14/34} = \frac{10}{14}$$

	Maschi	Femmine	
SI	10	4	14
NO	8	12	20
	18	16	*34*

Esempio. Usando la definizione di probabilità condizionata si trovi la probabilità di osservare “1” nel lancio di un dado non truccato, sapendo che il lancio ha prodotto un esito dispari.

Evento A: si osserva “1”

Evento B: si osserva un numero dispari

Cerchiamo la probabilità di A dato che si è verificato B.

$$P(A \cap B) = 1/6$$

$$P(B) = 1/2$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Eventi indipendenti

Se il verificarsi dell'evento *A* non è influenzato dal verificarsi o meno dell'evento *B*, allora diciamo che l'evento *A* è ***indipendente*** dall'evento *B*.

Due eventi *A* e *B* sono detti indipendenti se si verifica una delle seguenti condizioni:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

In caso contrario, gli eventi sono detti **dipendenti**.

Esempio. Si considerino i seguenti eventi generati dal lancio di un dado.

A. Si osserva un numero dispari.

B. Si osserva un numero pari.

C. Si osserva l'esito "1" oppure "2".

1. Gli eventi *A* e *B* sono indipendenti?

Per stabilire se gli eventi *A* e *B* sono indipendenti dobbiamo verificare se soddisfano le condizioni stabilite dalla definizione di indipendenza.

Due eventi A e B sono detti indipendenti se si verifica una delle seguenti condizioni:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A. Si osserva un numero dispari.

B. Si osserva un numero pari.

La probabilità di osservare un numero dispari dato che il lancio ha prodotto un numero pari è uguale a zero.

$$P(A|B) = 0$$

La probabilità di osservare un numero dispari è 1/2: $P(A) = \frac{1}{2}$

Dunque $$P(A|B) \neq P(A)$$

Ovvero, gli eventi *A* e *B* **NON** sono indipendenti**.**

2. Gli eventi A e C sono indipendenti?

A. Si osserva un numero dispari.

C. Si osserva l'esito "1" oppure "2".

$$P(A|C) = \frac{1}{2} \qquad\qquad P(A) = \frac{1}{2}$$

Dunque $$P(A|C) = P(A)$$

ovvero gli eventi A e C sono indipendenti.

Esempio. Tre marche di caffè, X, Y, Z, devono essere valutate da un giudice per le loro caratteristiche.

A. La marca X viene preferita alla marca Y.

B. La marca X è giudicata essere la migliore.

C. La marca X risulta essere la seconda nella graduatoria.

D. La marca X risulta essere l'ultima nella graduatoria.

Supponendo che il giudice si limiti ad assegnare i suoi punteggi in maniera casuale, si stabilisca se (in queste circostanze) l'evento A risulti essere indipendente dagli eventi B, C e D.

La prima cosa da stabilire è l'elenco di tutti i punti campione dello spazio campione di questo esperimento.

$$E_1 : XYZ \qquad E_2 : XZY$$

$$E_3 : YXZ \qquad E_4 : YZX$$

$$E_5 : ZXY \qquad E_6 : ZYX$$

I sei punti campione di questo esperimento sono equiprobabili, dunque a ciascuno di essi può essere assegnata la probabilità di 1/6.

A. La marca *X* viene preferita alla marca *Y*.

B. La marca *X* è giudicata essere la migliore.

Si calcoli *P(A)*

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_5) = 1/2$$

Si calcoli *P(A|B)*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(E_1) + P(E_2)}{P(E_1) + P(E_2)} = 1$$

Gli eventi A e B NON sono indipendenti dato che

$$P(A) \neq P(A \mid B)$$

A. La marca *X* viene preferita alla marca *Y*.

C. La marca *X* risulta essere la seconda nella graduatoria.

Si calcoli $P(A|C)$

$$P\left(A\,|\,C\right)=\frac{P\left(A\cap C\right)}{P\left(C\right)}=\frac{P\left(E_5\right)}{P\left(E_3\right)+P\left(E_5\right)}=\frac{1}{2}$$

Gli eventi A e C sono indipendenti dato che

$$P(A) = P(A \mid C)$$

A. La marca X viene preferita alla marca Y.

D. La marca X risulta essere l'ultima nella graduatoria.

Si calcoli $P(A|D)$

$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0}{P(E_4)+P(E_6)}=0$$

Gli eventi *A* e *D* NON sono indipendenti dato che

$$P(A) \neq P(A \mid D)$$

DUE LEGGI DELLA PROABILITA’

1 LEGGE DEL PRODOTTO
2 LEGGE DELLA SOMMA

LEGGE DEL PRODOTTO

La probabilità dell'*intersezione* di due eventi A e B è

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$
$$= P(B)P(A \mid B)$$

Se A e B sono indipendenti, allora

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

La legge moltiplicativa della probabilità segue direttamente dalla definizione di probabilità condizionata:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

LEGGE DELLA SOMMA

La probabilità dell'*unione* di due eventi A e B è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se A e B sono mutuamente esclusivi, allora $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ESERCIZI

E1. Dati due eventi *A* e *B* tali per cui

$$P(A) = .2 \qquad P(B) = .3 \qquad P(A \cup B) = .4$$

Si trovi

$$P(A \cap B) \qquad P(\overline{A} \cup \overline{B}) \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) \qquad P(\overline{A} \mid B)$$

E2. I manufatti prodotti da una data azienda vengono successivamente ispezionati da due ispettori.

La probabilità che il primo ispettore non individui un articolo difettoso è .1.

Al secondo ispettore “sfuggono” 5 articoli difettosi su 10, tra quelli che hanno già passato il controllo del primo ispettore.

Qual è la probabilità che un articolo difettoso superi il controllo di entrambi gli ispettori?

E3. In un referendum, il 40% dei votanti è di sesso maschile e il 60% di sesso femminile.

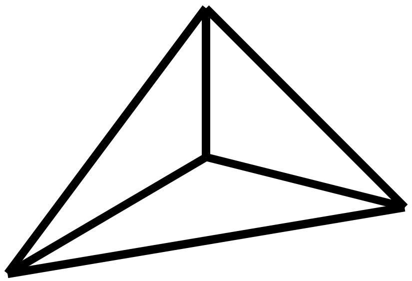
Tra coloro che hanno preso parte al voto, hanno votato “si” al quesito proposto il 70% dei maschi e l’80% delle donne.

Se un individuo venisse scelto a caso tra coloro che hanno votato al referendum, qual è la probabilità che questo individuo abbia votato “si”?

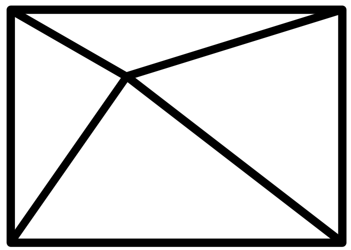
TEOREMA DI BAYES

Adattato da: Knill, Kersten, Yuille (1996). Introduction: A Bayesian formulation of visual perception. In David C. Knill e Withman Richards (Eds), 1996. Perception as Bayesian inference. Cambridge University press.

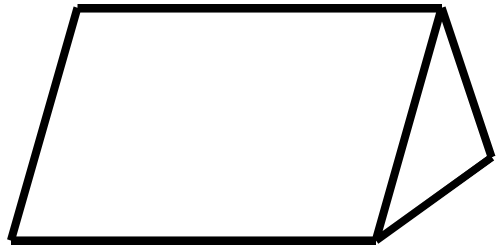
Immaginiamo che nel mondo ci siano solo 4 oggetti:



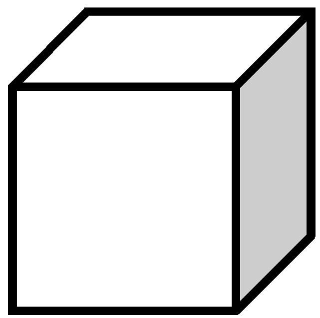
tetraedro



piramide

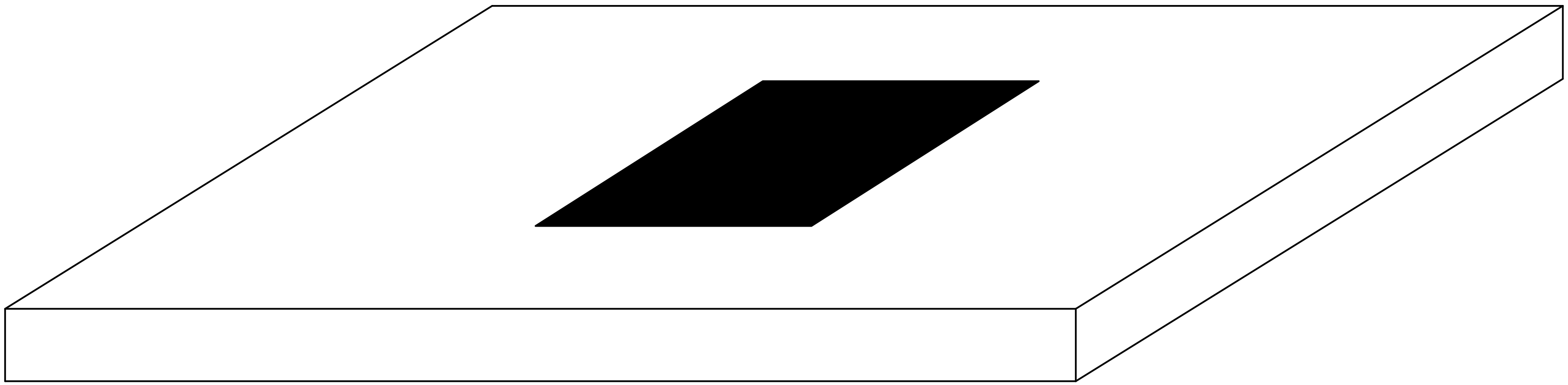


prisma

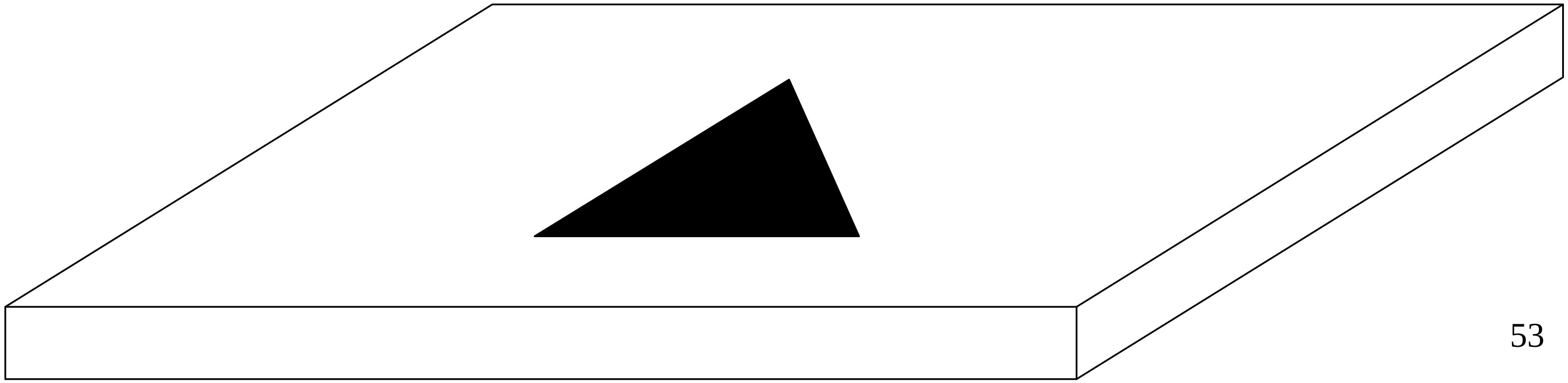


cubo

Supponiamo inoltre di conoscere soltanto la proiezione di ciascun oggetto su una superficie piana:



oppure



Dato che conosciamo la proiezione, il problema che ci poniamo è:

quale è la probabilità che a generare la proiezione sia stato un tetraedro?

quale è la probabilità che a generare la proiezione sia stato una piramide?

quale è la probabilità che a generare la proiezione sia stato un prisma?

quale è la probabilità che a generare la proiezione sia stato un cubo?

I 4 oggetti elencati in precedenza costituiscono le nostre ***ipotesi*** (*O*)

La probabilità che ciascuna di queste ipotesi sia vera è detta ***probabilità a priori***, *P(O).*

Si noti che la somma delle probabilità a priori deve essere uguale a 1dato che le ipotesi sono un insieme esaustivo di eventi mutualmente escludentisi.

Poniamo che la distribuzione delle ***probabilità a priori*** degli oggetti sia la seguente:

O	***P(O)***
Tetraedro	***0.1***
Piramide	***0.3***
Prisma	***0.4***
Cubo	***0.2***

Chiediamoci ora quale è la probabilità che una data proiezione sia stata prodotta da uno specifico oggetto, $P(P|O)$, ovvero, quale è la probabilità di un tipo di proiezione dato un oggetto.

La distribuzione di queste probabilità si chiama ***funzione di verosimiglianza*** (*likelihood function*)

	tetraedro	***piramide***	***prisma***	***cubo***
triangolo	**1.0**	**0.8**	**0.4**	**0.0**
quadrato	**0.0**	**0.2**	**0.6**	**1.0**

Dato un oggetto, le probabilità associate alle diverse proiezioni devono sommare a 1.0 e costituiscono dunque una distribuzione di probabilità.

Dato ciascuna proiezione, invece, le probabilità non sommano ad 1.0, il che significa che, fissando il segnale, la funzione di verosimiglianza non è una funzione di probabilità.

Il nostro problema è trovare le probabilità dei diversi oggetti, sapendo che è stata osservata una specifica proiezione, $P(O|P)$.

Queste probabilità sono dette ***probabilità a posteriori***.

Le probabilità a posteriori si calcolano per mezzo del *teorema di Bayes*.

TEREMA DI BAYES

$$P\left(O_j \mid P\right) = \frac{P\left(O_j\right)P\left(P \mid O_j\right)}{\sum_{i=1}^{k} P\left(O_i\right)P\left(P \mid O_i\right)}$$

Dati gli eventi oggetto (*O*) e proiezione (*P*), si possono definire due probabilità condizionate:

$$P(O_j \mid P) = \frac{P(O_j \cap P)}{P(P)}$$

Probabilità a posteriori

$$P(P \mid O_j) = \frac{P(O_j \cap P)}{P(O_j)}$$

Likelihood

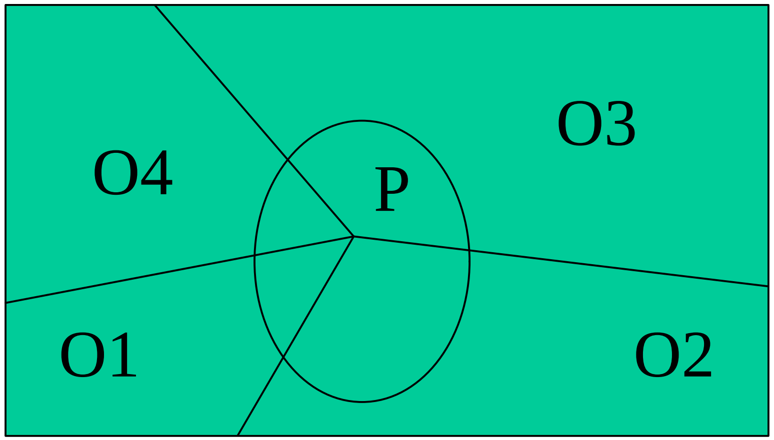
Usando la formula della *likelihood*, il <u>*numeratore*</u> della formula della probabilità a posteriori diventa

$$P(O_j \cap P) = P(O_j)P(P \mid O_j)$$

Il <u>*denominatore*</u> della formula della probabilità a posteriori è:

$$P(P) = P(P \cap O_1) + P(P \cap O_2) + P(P \cap O_3) + P(P \cap O_4)$$

dato che gli eventi che rappresentano gli oggetti costituiscono una partizione dello spazio campione.



Usando nuovamente la formula della *likelihood*, otteniamo:

$$P(P) = P(O_1)P(P \mid O_1) + P(O_2)P(P \mid O_2) + \\ + P(O_3)P(P \mid O_3) + P(O_4)P(P \mid O_4)$$

In conclusione, la probabilità a posteriori *P(O|P)* viene espressa nei termini delle probabilità a priori, *P(O)*, e della *likelihood*, *P(P|O)*.

In questo modo otteniamo il teorema di Bayes.

$$P(H_j \mid E) = \frac{P(H_j)P(E \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(H_i)P(E \mid H_i)}$$

H = ipotesi
E = evidenza

TEOREMA DI BAYES

La probabilità a posteriori dell'oggetto tetraedro data la proiezione triangolo, per esempio, è:

$$\frac{P(tetraedro)P(\triangleleft|\, tetraedro)}{P(tetraedro)P(\triangleleft|\, tetraedro)+P(piramide)P(\triangleleft|\, piramide)+P(prisma)P(\triangleleft|\, prisma)+P(cubo)P(\triangleleft|\, cubo)}$$

$$P(tetraedro\,|\triangleleft)=\frac{.1\times 1}{(.1\times 1.0)+(.8\times .3)+(.4\times .4)+(0\times .2)}=.2$$

$$P(piramide\,|\triangleleft)=\frac{.8\times .3}{(.1\times 1.0)+(.8\times .3)+(.4\times .4)+(0\times .2)}=.48$$

La distribuzione delle ***probabilità a posteriori*** dell'oggetto data la proiezione è:

	tetraedro	***piramide***	***prisma***	***cubo***
triangolo	**0.2**	**0.48**	**0.32**	**0.0**
quadrato	**0.0**	**0.12**	**0.48**	**0.4**

Per ciascuna proiezione, la somma delle probabilità a posteriori dei diversi oggetti è uguale a 1.0.

Una volta fissata l'evidenza, dunque, viene pure fissata una distribuzione a posteriori di probabilità.

ESERCIZIO

E4. In un gruppo, il 4% degli uomini e l'1% delle donne sono più alti di 1.80. In questo gruppo, le donne sono il 60%.

Se un individuo viene scelto a caso da questo gruppo, e risulta essere più alto di 1.80, quale è la probabilità che sia una donna?

E5. Il 60% degli studenti che si iscrivono ad un corso di informatica riesce a superare l'esame finale del corso. Prima di iniziare il corso, tutti gli studenti sono stati sottoposti ad un test d’accesso.

Terminato il corso, l’istruttore ha stabilito che, tra coloro che hanno superato l’esame finale del corso, l’80% aveva ottenuto un punteggio sufficiente nel test d’accesso.

La sufficienza nel test d’accesso era stata raggiunta, invece, da solo il 40% degli studenti che non hanno superato l'esame finale del corso.

Se venissero ammessi soltanto gli studenti che ottengono la sufficienza nel test d’accesso, quale sarebbe la probabilità di superare l'esame finale del corso?

ESERCIZIO

E6. Un medico somministra ad un paziente un test per il cancro. Prima della somministrazione del test, il medico sa solo che quel particolare cancro è presente in 1 individuo su 1000.

Risultati precedenti con il test hanno dimostrato che, nel 99% dei casi in cui il cancro è presente, il test è positivo.

Nel 95% dei casi in cui il cancro non è presente, il test è negativo.

(1) Se per quel particolare paziente il risultato del test è positivo, quale è la probabilità che il paziente abbia effettivamente il cancro?

(2) Trovate la percentuale di falsi positivi, ovvero stabilite quanto spesso ad un risultato positivo nel test corrisponde l'assenza del cancro.

(3) Supponete ora che tutti i dati del problema restino invariati, tranne l'incidenza del cancro nella popolazione. Ipotizziamo che il cancro sia presente nel 10% della popolazione. L'interpretazione che dobbiamo dare ai risultati del test cambia oppure no?