CALCOLO COMBINATORIO

Psicometria 1 - Lezione 5
Lucidi presentati a lezione

AA 2000/2001 dott. Corrado Caudek

Il problema del calcolo combinatorio è stabilire in quanti modi diversi una sequenza di eventi può realizzarsi.

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio può essere enunciato nel modo seguente:

se vi è un primo evento che può dare luogo a n_1 esiti possibili,
un secondo evento che può dare luogo a n_2 esiti possibili,
un terzo evento che può dare luogo a n_3 esiti possibili e così via,

allora il numero di esiti possibili dell'intera sequenza di eventi sarà uguale a:

$$\boldsymbol{n_1 n_2 n_3}$$

Esempio. Supponiamo di creare una targa che contiene due lettere diverse tra loro seguite da tre cifre, la prima delle quali è diversa da zero. Quante targhe diverse possiamo creare in questo modo?

La prima lettera può essere stampata in 26 modi diversi, la seconda lettera in 25 modi diversi.

La prima cifra può essere stampata in 9 modi diversi e le altre due in 10 modi ciascuna.

Dunque il numero di targhe possibili è uguale a:

26 * 25 * 9 * 10 * 10 = 585 000.

Da questo principio generale possiamo dedurre il caso particolare in cui abbiamo un insieme di n eventi, ciascuno dei quali può produrre un numero costante k di esiti possibili.

In precedenza abbiamo visto che il risultato che cerchiamo si calcola come il prodotto del numero di esiti possibili del primo evento moltiplicato per il numero di esiti possibili del secondo evento e così via.

Se ci sono n eventi e il numero di esiti possibili per ciascun evento è costante, k, allora il risultato diventa semplicemente:

$$k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_n = k^n$$

Esempio. Consideriamo l'evento costituito dal lancio di una moneta. In questo caso vi sono solo 2 esiti possibili (T e C). Dunque, $k = 2$. Quanti sono gli esiti possibili che si possono ottenere lanciando una moneta 5 volte?

Dato che $n = 5$ e $k = 2$, il numero degli esiti possibili di cinque lanci di una moneta sarà uguale a:

$$k^n = 2^5 = 32 .$$

Lanciando una moneta 5 volte possiamo ottenere dunque 32 sequenze diverse. Lo stesso risultato si ottiene, ovviamente, se 5 monete vengono lanciate contemporaneamente.

Questa regola non è altro che un caso particolare del principio fondamentale del calcolo combinatorio che abbiamo enunciato precedentemente.

In base al principio fondamentale del calcolo combinatorio, infatti, il risultato cercato è uguale a:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

Esempio.

Quanti sono gli esiti possibili prodotti dal lancio di due dadi?

Ciascun dado può produrre 6 esiti diversi. In questo caso, dunque, n = 2 e k =6.

Il numero di esiti possibili è:

$$6^2 = 36 .$$

DISPOSIZIONI

Spesso è necessario stabilire quanti gruppi di una certa grandezza si possono estrarre da un insieme.

Poniamoci quindi il problema di stabilire quanti diversi sottoinsiemi di grandezza r si possono estrarre da un insieme di grandezza n.

La soluzione di questo problema dipende dal modo in cui definiamo le caratteristiche dei sottoinsiemi r.

Possiamo decidere che due sottoinsiemi composti dagli stessi elementi costituiscono due sottoinsiemi diversi *se gli elementi sono disposti in un ordine diverso*.

I sottoinsiemi così definiti sono chiamati ***disposizioni***.

Oppure possiamo decidere che, per avere sottoinsiemi diversi, è necessario che i sottoinsiemi siano costituiti da *elementi diversi*, indipendentemente dall'ordine in cui sono arrangiati.

I sottoinsiemi così definiti sono chiamati ***combinazioni***.

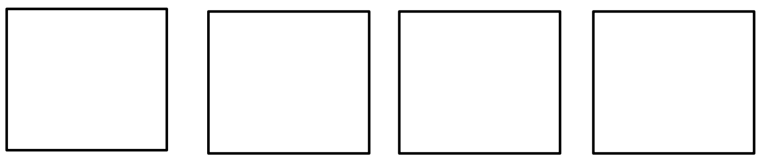
DISPOSIZIONI SENZA RIMESSA

Si dicono ***disposizioni*** senza rimessa di n elementi presi r a r ($r \le n$) i sottoinsiemi formati da r elementi che *differiscono tra loro per qualche elemento oppure per l'ordine in cui gli elementi sono disposti.*

Il numero di disposizioni di n elementi presi r alla volta si indica con $D_{n,r}$.

Esempio. Dato l'insieme $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l\}$, quanti sottoinsiemi di 4 lettere (che differiscono per le lettere di cui sono composti o per l'ordine) possiamo creare?

Iniziamo a rappresentare con quattro quadrati un generico arrangiamento di quattro lettere:



La prima lettera può essere scelta in 10 modi diversi.

Ci restando dunque 9 candidati per la seconda lettera.

Allo stesso modo, restano 8 candidati per la terza lettera e 7 candidati per la quarta lettera:

$$\boxed{10}\quad\boxed{9}\quad\boxed{8}\quad\boxed{7}$$

In base al principio fondamentale del calcolo combinatorio, il numero di disposizioni risulta essere uguale a:

$$\boldsymbol{D_{10,4} = 10 * 9 * 8 * 7}$$

In questo caso, n = 10 e r = 4. Si noti che lo stesso risultato si ottiene usando la seguente formula:

$$\boldsymbol{D_{10,4} = 10 * 9 * 8 * 7}$$

$$D_{n,r} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-(r-1))$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-r+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{10(9)(8)(10-4+1)6!}{(n-r)!} = \frac{10(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(n-r)!}$$

In conclusione, *il numero di disposizioni senza rimessa di n elementi presi r a r* è uguale a:

$$D_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Esempio.

Una lotteria assegna un premio ai primi 3 estratti. Sono stati venduti 40 biglietti. In quanti modi possibili i premi possono essere assegnati ai giocatori?

In questo caso, ovviamente, l'ordine in cui gli elementi sono disposti è importante.

Dobbiamo calcolare le disposizioni senza rimessa con $n = 40$ e $r = 3$:

$$D(40,3) = \frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40!}{37!} = 59280$$

PERMUTAZIONI
DI ELEMENTI DISTINTI

Le disposizioni senza rimessa di n elementi presi r a r sono i gruppi formati da r elementi che differiscono tra loro per qualche elemento oppure per l'ordine in cui gli elementi sono ordinati.

Consideriamo ora il caso particolare in cui $r = n$, ovvero il caso in cui ciascun sottoinsieme contiene tutti gli elementi dell'insieme e differisce dagli altri solo per l'ordine in cui gli elementi sono arrangiati.

Un tale sottoinsieme si chiama *permutazione senza rimessa* di n elementi distinti presi n a n.

Una permutazione di n elementi si indica con P_n.

Applicando la regola per calcolare il numero di disposizioni senza rimessa di n elementi presi r a r al caso particolare in cui $r = n$ otteniamo:

$$P_n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

In conclusione, il numero di permutazioni di n elementi, ovvero il numero di gruppi di n elementi che differiscono tra loro solo per l'ordine in cui gli elementi sono disposti è uguale a:

$$P_n = n!$$

Esempio. Quanti anagrammi si possono formare con la parola *pane* se prescindiamo dal significato delle varie sequenze di lettere?

4 3 2 1 = 24

Esempio. 4 persone devono essere arrangiate in fila per essere fotografate. In quanti modi diversi possono essere arrangiate?

4 3 2 1 = 24

Esempio. Un test di intelligenza consiste nell’ordinare 6 immagini in modo da formare una sequenza dotata di senso.

In quanti modi diversi un soggetto può ordinare le 6 immagini?

$$\mathbf{6!}$$

ESERCIZI

E1. Una casa automobilistica dispone di 4 colori per l'esterno di una nuova automobile e di 3 colori per l'interno. Quante diverse combinazioni di colori si possono realizzare?

E2. In un computer un *bit* è uno dei numeri interi $\{1, 0\}$ e una *parola* è una sequenza di 32 bit. Quante diverse parole sono possibili?

E3. Ci sono tre diversi percorsi che collegano la città A con la città B. In quanti modi diversi può essere compiuto un viaggio da A a B e ritorno? In quanti modi diversi può essere compiuto un viaggio da A a B e ritorno se si vuole che la strada del ritorno sia diversa da quella dell'andata?

E4. Ci sono 10 sedie per 10 persone. In quanti modi diversi le 10 persone possono occupare i 10 posti a sedere?

COMBINAZIONI SENZA RIMESSA

Si dicono *combinazioni senza rimessa* di n elementi presi r a r ($r \leq n$) i gruppi formati da r elementi che differiscono tra loro per almeno un elemento.

Il numero di combinazioni senza rimessa di n elementi presi r alla volta si indica con $C_{n,r}$.

Quali sono le combinazioni senza rimessa che si possono ottenere dall'insieme costituito dalle quattro lettere $\{a, b, c, d\}$ prese 3 a 3?

$$abc, abd, acd, bcd$$

La differenza tra combinazioni senza rimessa e disposizioni senza rimessa è costituita dal fatto che, nel caso delle disposizioni, l'ordine degli elementi consente di specificare gruppi diversi mentre, nel caso delle combinazioni, l'ordine degli elementi è irrilevante.

Combinazioni	Disposizioni
abc	*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*
abd	*abd*, *adb*, *bad*, *bda*, *dab*, *dba*
acd	*acd*, *adc*, *cad*, *cda*, *dac*, *dca*
bcd	*bcd*, *bdc*, *cbd*, *cdb*, *dbc*, *dcb*

Per trovare una formula generale che consenta di trovare il numero di combinazioni senza rimessa di *n* elementi presi *r* a *r*, osserviamo che ciascuna combinazione può essere permutata in 6 modi diversi.

Il numero di combinazioni si può dunque calcolare dividendo il numero delle disposizioni senza rimessa per il numero di permutazioni degli *r* elementi che costituiscono il sottoinsieme considerato:

$$C_{n,r} = \frac{D_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

In conclusione, *il numero di combinazioni senza rimessa di n elementi presi r a r* è uguale a:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Il simbolo $\binom{n}{r}$ è chiamato ***coefficiente binomiale***.

Si noti che

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

Esempio. Quanti modi diversi ci sono di selezionare 3 carte (senza considerare l'ordine) da un mazzo di 52 carte?

$$\binom{52}{3} = \binom{52}{49} \frac{52!}{49!(3)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49! \cdot 6} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{6} = 22{,}100$$

Esempio. Supponiamo che vi siano 33 candidati e solo tre posizioni disponibili. In quanti modi diversi 3 candidati possono essere selezionati da un gruppo di 33?

n = 33 e r = 3

$$\binom{33}{3} = \frac{33!}{3!(30)!} = \frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30!}{3 \cdot 2 \cdot 30!} = 5{,}456$$

Esempio. In quanti modi si può formare una commissione di 3 uomini e 2 donne scelti tra 7 uomini e 5 donne?

I 3 uomini possono essere scelti tra i 7 in $\binom{7}{3}$ modi e le 2 donne possono essere scelte tra le 5 in $\binom{5}{2}$ modi.

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7!}{3!4!}\frac{5!}{2!3!} = \frac{7(6)(5)}{3(2)}\frac{5(4)}{2} = 350$$

In conclusione, ci sono 350 modi diversi di formare la commissione.

Esempio. Nel gioco del poker a ciascun giocatore vengono distribuite 5 carte estratte da un mazzo ben mescolato di 52 carte. In quanti modi diversi le 5 carte possono venire assegnate ad un giocatore?

In questo caso, l'ordine delle carte è irrilevante, dunque il numero cercato è dato dal coefficiente binomiale:

$$\binom{52}{5} = \binom{52}{47} = \frac{52!}{5!(47)!}$$

PERMUTAZIONI
DI ELEMENTI NON TUTTI DIVERSI

Il numero di permutazioni di *n* elementi tra loro tutti diversi è (*n!*).

L'insieme *{a, b, c, d}*, ad esempio, può essere permutato in *4! = 24* modi diversi.

(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), (a,d,c,b), (a,d,b,c),

(b,c,d,a), (b,c,a,d), (b,d,c,a), (b,d,a,c), (b,a,d,c), (b,a,c,d),

(c,d,a,b), (c,d,b,a), (c,a,d,b), (c,a,b,d), (c,b,a,d), (c,b,d,a),

(d,a,b,c), (d,a,c,b), (d,b,a,c), (d,b,c,a), (d,c,b,a), (d,c,a,b)

Consideriamo ora il caso in cui nell'insieme di *n* elementi esistono *g* sottoinsiemi costituiti da elementi tutti uguali.

In questo caso, il numero delle permutazioni di *n* elementi che si suddividono in g sottoinsiemi di elementi uguali contenenti $k_1, k_2, \ldots, k_g$ elementi (con $k_1, k_2, \ldots, k_g = n$) è

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_g} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_g!}$$

La formula precedente viene chiamata “***coefficiente multinomiale***” e costituisce una generalizzazione del coefficiente binomiale.

L’insieme *{a, a, b, b}*, ad esempio, può essere permutato in *6* modi diversi.

(a,a,b,b), (a,b,a,b), (a,b,b,a), (b,a,b,a), (b,a,a,b), (b,b,a,a)

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

Esempio. In una scatola ci sono 4 perle, una rossa, due gialle e una verde. In quanti modi diversi potranno essere infilate in un filo?

Dobbiamo calcolare le permutazioni di 4 elementi tra loro non tutti distinti:

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \frac{4!}{2!\ 1!\ 1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1 \times 1} = 12$$

E’ importante notare che il coefficiente multinomiale si riduce al coefficiente binomiale nel caso in cui ci siano soltanto due sottoinsiemi di elementi tra loro non distinti.

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1, (n-k_1)} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

Esempio. In quanti modi diversi si possono ottenere 2 esiti "testa" e 3 esiti "croce" in 5 lanci di una moneta?

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1, (n-k_1)} = \binom{n}{k_1} = \binom{n}{(n-k_1)}$$

$$= \frac{5!}{2!\ 3!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 3\times 2\times 1} = 10$$

ESERCIZI

E5. Un etologo studia le interazioni tra cani appartenenti alla stessa razza e a razze diverse. Dispone di 4 cani di razza A, 5 cani di razza B, 2 cani di razza C e di 6 cani di razza D.

Se vuole studiare tutti i possibili confronti tra questi cani, quante diverse situazioni deve esaminare?

E6. Uno sperimentatore può fare uso di 4 ratti per un esperimento. Vuole creare gruppi di 3 ratti e ritiene importante l'ordine in cui gli animali vengono sottoposti alle prove a causa dell'apprendimento indiretto.

Quanti gruppi possono essere creati in base a questi vincoli?

E7. La casa editrice di una rivista offre in omaggio agli abbonati la scelta di 3 tra 4 libri. In quanti modi può effettuare la sua scelta un abbonato?

E8. A un soggetto devono essere presentati 10 tratti di personalità a 3 a 3 in tutti i modi possibili affinché li ordini da quello più adatto a quello meno adatto a descrivere un adolescente.

Quanti confronti dovrà eseguire un soggetto?

E9. Un bambino gioca con un pianoforte giocattolo che può produrre 12 note. Il bambino produce 4 note (ammettendo anche la possibilità che la stessa nota venga ripetuta). Quante diverse sequenze di note sono possibili?

E10. Uno sperimentatore ha a disposizione 20 soggetti e vuole dividerli in 2 gruppi di 10 soggetti ciascuno.

(a) In quanti modi possibili può essere formato il primo gruppo?

(b) Una volta che il primo gruppo è stato formato, in quanti modi possibili può essere formato il secondo gruppo?

E11. Una data Facoltà è costituita da 3 Dipartimenti, A, B, C. Il Dipartimento A è formato da 10 professori, il Dipartimento B è formato da 15 professori e il Dipartimento C è formato da 20 professori. Il consiglio di Facoltà forma un comitato che contenga al suo interno 1/5 dei membri di ciascuno dei 3 dipartimenti.

Quanti modi diversi ci sono per formare un tale comitato? (fornite la risposta in forma simbolica)

E12. Quante sequenze diverse contengono soltanto 3 esiti “testa” in una serie di 15 lanci di una moneta?