Teoria della misurazione e significanza delle statistiche

Psicometria 1 - Lezione 4
Lucidi presentati a lezione

AA 2000/2001 dott. Corrado Caudek

Il problema della misura in psicologia è particolarmente arduo a causa della difficoltà di precisare la natura delle variabili psicologiche come intelligenza, motivazione, aggressività.

Il fatto che sia difficile precisare a cosa corrispondono questi costrutti va a pari passo con la difficoltà di specificare in che modo essi debbano essere misurati.

Il processo di misura mette in relazione due insiemi: l'insieme costituito dagli elementi che si vogliono misurare (detto *insieme empirico*) e un secondo insieme (*insieme numerico*) volto a rappresentare mediante numeri le relazioni che esistono all'interno dell'insieme empirico.

DEFINIZIONE DI MISURA

Misurare un *sistema relazionale empirico* equivale ad associare a ciascuno dei suoi elementi un numero appartenente ad un conveniente *sistema relazionale numerico* in modo che vengano rispecchiate le caratteristiche costituite dai legami messi in evidenza nel sistema empirico.

Per *sistema relazionale* si intende ogni insieme considerato insieme alle relazioni in esso definite.

Per *sistema relazionale numerico* si intende ogni sistema il cui dominio sia un insieme di numeri.

Esempio. Il sistema relazionale N = < *N*, < > avente come dominio *N* = {1, 2, 3, 4} e dalla relazione “il numero *a* è minore del numero *b*” è un sistema relazionale numerico.

Esempio. Il sistema relazionale R = < *R*, = > avente come dominio l’insieme dei numeri reali e dalla relazione di eguaglianza è un sistema relazionale numerico.

Per *sistema relazionale empirico* si intende ogni sistema il cui dominio sia un insieme di entità non numeriche.

Esempio. Il sistema relazionale $\mathrm{P} = < P, < >$ costituito da un insieme di persone e dalla relazione “essere meno simpatico di” è un sistema relazionale empirico.

Esempio. Il sistema relazionale $\mathrm{S} = < S, + >$ avente come dominio un insieme di segmenti e dalla operazione di congiunzione (ponendo due segmenti uno di seguito dell’altro si ottiene un terzo segmento) è un sistema relazionale empirico.

Si distinguono diversi *livelli di misura* a seconda delle proprietà che caratterizzano il sistema empirico e il sistema numerico.

**In psicologia vengono usati quattro livelli di misura:
la scala nominale, la scala ordinale, la scala ad intervalli e la scala a rapporti.**

Autori diversi hanno assegnato significati diversi alla parola "misurazione", anche se c'è generale accordo sull'idea che misurare significa *stabilire una relazione tra un sistema relazionale empirico ed un sistema relazionale numerico*.

Nella discussione seguente esamineremo:

- Proprietà dei sistemi empirici

- Proprietà dei sistemi numerici

- Morfismi

(relazioni esistenti tra diversi sistemi relazionali)

Misurare significa ***costruire un omomorfismo tra il sistema relazionale empirico e un sistema relazionale numerico*****.**

SISTEMA RELAZIONALE EMPIRICO

(1) Nei sistemi empirici le *relazioni* presenti sono definite empiricamente e metodi di indagine diversi possono produrre risultati diversi.

Es. la relazione “l’atteggiamento verso le minoranze della persona *x* è più favorevole di quello della persona *y*” può essere definita mediante l’osservazione in situazioni sperimentali, mediante questionario, o mediante un intervista di tipo clinico. La relazione può mutare a secondo del metodo.

(2) La validità delle proprietà delle relazioni definite all’interno dei sistemi empirici deve essere controllata empiricamente.

Es. dati tre colori *a*, *b*, *c*, se *a* è giudicato chiaro quanto *b*, e *b* è giudicato chiaro quanto *c*, allora potremmo pensare che *a* sarà giudicato tanto chiaro quanto *c*.

Sperimentalmente, però la *transitività* potrebbe non verificarsi, ed *a* potrebbe essere giudicato come più chiaro di *c*.

Ci sono diversi tipi di sistemi relazionali empirici:

SISTEMI EMPIRICI BINARI:

- ***Sistema classificatorio***
- ***Serie empirica***
- ***Quasi serie empirica***

SISTEMI EMPIRICI QUATERNARI:

- ***Sistema empirico delle differenze***
- ***Sistema empirico delle differenze finito ed equispaziato***
- ***Sistema empirico infinito delle differenze***
- ***Sistemi additivi***

SISTEMI EMPIRICI BINARI

Si dice *sistema empirico binario* ogni sistema $\mathbf{A} = < A, R >$ costituito da un insieme *A* di entità empiriche e da una relazione binaria *R* in esso definita.

Esempio. L'insieme *A* potrebbe essere un insieme di persone e *R* potrebbe essere la relazione "*a* è emotivamente dipendente da *b*", per *a* e *b* appartenenti ad *A*.

SISTEMA CLASSIFICATORIO

Un sistema empirico binario si dice un *sistema classificatorio* se la relazione binaria in esso definita è una relazione di equivalenza:

$$\boldsymbol{A = < A, \sim >}$$

Dato che ogni relazione di equivalenza in un insieme genera una partizione dell'insieme stesso, un sistema classificatorio può anche essere definito come un sistema relazionale empirico costituito da un insieme e da una partizione in esso definita.

Esempio. Sia **C = < C, ~ >** un sistema relazionale costituito da un insieme di colori e dalla relazione "*a* **~** *b* se e solo se due qualunque campioni di *a* e *b* sono dello stesso colore". **C** è un sistema classificatorio.

La presenza della relazione di equivalenza ci consente soltanto di raggruppare tra loro elementi equivalenti rispetto ad una caratteristica. Si può soltanto dire se due elementi sono o meno equivalenti rispetto alla caratteristica considerata.

SERIE EMPIRICA

Un sistema relazionale empirico binario definisce una *serie empirica* se la relazione < in esso definita è un *ordine stretto totale*, ovvero se la relazione < è una relazione asimmetrica, transitiva, connessa in *A*.

Esempio. Sia C un campione di colori grigi di diversa chiarezza. La relazione < definita da "$a < b$ se e solo se a è meno chiaro di b" determina una serie empirica ***se si verifica sperimentalmente*** che < è una relazione asimmetrica, transitiva e connessa.

1. " a, b Î A a < b Þ b NON E’ < a (asimetrica)

2. " a, b, c Î A a < b, b < c Þ b < c (transitiva)

3. " a, b Î A a ¹ b Þ a < b o b < a (connessione)

Esempio. Viene condotto uno studio sul significato psicologico dei colori. Per questo esperimento sono stati utilizzati quattro colori, verde, blu, giallo e rosso.

Con il metodo dei confronti a coppie, due cartoncini di diverso colore vengono presentati a 50 soggetti ai quali viene chiesto di decidere quale tra i due stimoli presentati sia più “caldo”.

Nelle tabelle successive, all’incrocio della riga i e della colonna j sarà presentata la proporzione di soggetti che hanno giudicato il colore della riga i come più caldo del colore della colonna j.

B

A

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU		.54	.22	.56
MARRONE	.46		.24	.56
ROSSO	.78	.76		.84
VIOLA	.44	.44	.16	

Se meno del 50% dei soggetti ha giudicato il colore *a* come “meno caldo” del colore *b*, allora diciamo che è stata osservata la relazione “*a* è meno caldo di *b*”. Questa relazione verrà indicata con il simbolo “<“.

B

A

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU			<	
MARRONE	<		<	
ROSSO				
VIOLA	<	<	<	

Per stabilire se la relazione "*a* è meno caldo di *b*" individua una *serie empirica* per le risposte agli stimoli di questo esperimento è necessario verificare se i giudizi soddisfano le proprietà:

- ***asimmetrica***

- ***transitiva***

- ***connessa***

<u>Verifica della validità della proprietà asimmetrica</u>:
viola < *blu*, ma non *blu* < *viola*; *blu* < *rosso* ma non *rosso* < *blu*. Analogamente per tutte le altre coppie di colori.

	BLU	**MARRONE**	**ROSSO**	**VIOLA**
BLU			<	
MARRONE	<		<	
ROSSO				
VIOLA	<	<	<	

<u>Verifica della validità della proprietà transitiva</u>:
nella tabella si verifica, ad esempio, *viola* < *blu* e *blu* < *rosso*. La proprietà transitiva implicherebbe *viola* < *rosso*. Nella tabella si verifica effettivamente *viola* < *rosso*. Analogamente si verifica la transitività per tutte le altre coppie di colori.

	BLU	**MARRONE**	**ROSSO**	**VIOLA**
BLU			<	
MARRONE	<		<	
ROSSO				
VIOLA	<	<	<	

<u>Verifica della validità della connessione</u>:
presi due stimoli i e j, si verifica sempre che $i < j$ o $j < i$.
Ad esempio, considerata la coppia (*blu*, *rosso*) risulta *blu* < *rosso*. Per la coppia (*blu*, *viola*) risulta *viola* < *blu*.

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU			<	
MARRONE	<		<	
ROSSO				
VIOLA	<	<	<	

<u>L'ordine stretto totale</u> individuato dalla relazione "*a* è meno caldo di *b*" consente di ordinare gli stimoli dal meno caldo al più caldo.

L'ordinamento indotto da "*a* è meno caldo di *b*" è:

viola < marrone < blu < rosso

Le serie empiriche sono caratterizzate dal fatto di introdurre nel dominio del sistema un procedimento di “seriazione” rispetto ad un attributo che compare in grado diverso in ciascun elemento.

La relazione presente nel sistema empirico ordina gli elementi rispetto al grado in cui godono di una determinata caratteristica.

La seriazione rivela che non esistono due elementi che godano in grado uguale dell’attributo considerato.

Nell’esempio, i colori presentano tutti in grado diverso la caratteristica “essere caldo” e vengono ordinati dal più caldo al meno caldo.

QUASI SERIE EMPIRICA

Un sistema relazionale empirico si dice una *quasi-serie empirica* se è costituito da un insieme in cui sia definito un <u>ordine largo totale</u>.

1. ***" a Î A a ≤ b Þ a ≤* a *(riflessività)***
2. ***" a, b, c Î A a ≤ b, b ≤ c Þ b ≤ c (transitività)***
3. ***" a, b Î A Þ a ≤ b o b ≤ a (connessione)***

Esempio. Viene condotto uno studio sul significato psicologico dei colori. Per questo esperimento sono stati utilizzati quattro colori, verde, blu, giallo e rosso.

Con il metodo dei confronti a coppie, <u>stimoli verbali</u> indicanti colori diversi sono stati presentati a 50 soggetti ai quali veniva chiesto di decidere quale tra i due colori fosse più “caldo”.

Nelle tabelle successive, all’incrocio della riga *i* e della colonna *j* sarà presentata la proporzione di soggetti che hanno giudicato il colore della riga *i* come più caldo del colore della colonna *j*.

B

A

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU		.38	.28	.42
MARRONE	.62		.28	.50
ROSSO	.74	.72		.82
VIOLA	.58	.50	.18	

Sia la relazione “*a* £ *b*” se e solo se il colore *a* è stato giudicato meno caldo del colore *b* con una proporzione di volte <u>inferiore o uguale</u> a .50.

B

A

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU		≤	≤	≤
MARRONE			≤	≤
ROSSO				
VIOLA		≤	≤	

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU		.38	.28	.42
MARRONE	.62		.28	.50
ROSSO	.74	.72		.82
VIOLA	.58	.50	.18	

La relazione “essere non meno caldo di (**£**)” può essere sostituita dalle relazioni “essere di uguale calore rispetto a (**~**)” e “essere di calore inferiore a (<)” tra loro congiunte. In questo modo la tabella diventa:

	BLU	MARRONE	ROSSO	VIOLA
BLU		<	<	<
MARRONE			<	~
ROSSO				
VIOLA		~	<	

Adottando lo stesso procedimento dell’esempio precedente, si può verificare che le relazioni ” **~** “ e “ < “ sono, rispettivamente, una ***relazione di equivalenza*** e una ***relazione di ordine stretto parziale***.

Aver messo in evidenza le relazioni “ **~** “ e “< “ consente di ordinare i colori dal meno caldo al più caldo, con la possibilità di avere colori che presentano in grado uguale l’attributo “calore”. L’ordinamento è il seguente:

blu < viola ~ marrone < rosso

Le *quasi serie* empiriche sono caratterizzate dal fatto che gli elementi del dominio del sistema godono tutti di uno stesso attributo in grado uguale o diverso.

La relazione d'ordine largo che individua la quasi serie consente di ordinare gli elementi da quelli che godono meno della presenza dell'attributo a quelli che ne godono di più, ammettendo però che esistano elementi in cui l'attributo sia presente nello stesso grado.

Le serie e le quali serie empiriche sono caratterizzate entrambe da una relazione d'ordine totale, stretto la prima, largo la seconda.

Per alcuni sistemi empirici non è sufficiente la relazione d’ordine perché, con questa, si può rappresentare il fatto che a < b < c < d, ***ma non la differenza di intensità tra coppie di valori del dominio***.

Per potere rappresentare questa caratteristica, è necessario considerare le ***relazioni quaternarie*** che collegano 4 elementi del sistema.

SISTEMI EMPIRICI QUATERNARI

Un sistema empirico quaternario è costituito da un sistema empirico all'interno del quale si possa definire una relazione quaternaria.

Considereremo il sistema empirico quaternario chiamato ***sistema empirico delle differenze***.

Un sistema empirico delle differenze consente di ordinare gli oggetti empirici rispetto ad una certa caratteristica.

E' inoltre possibile decidere, presi quattro elementi qualunque *a*, *b*, *c*, *d*, se la differenza di intensità della caratteristica in *b* e in *a* è minore, uguale o maggiore della differenza di intensità della caratteristica in *d* e in *c* .

Questa relazione tra le differenze di intensità consente di disporre gli elementi del sistema empirico su una retta dove ***i segmenti che rappresentano le differenze sono confrontabili***.

Un sistema empirico delle differenze A = < *A*, *Q* > soddisfa le seguenti proprietà:

1) ***Q* è una relazione transitiva in A×A:**

$$\boldsymbol{a\,b\ Q\ c\,d,\ c\,d\ Q\ e\,f\ \Rightarrow\ a\,b\ Q\ e\,f}$$

$$\boldsymbol{\forall\ a, b, c, d, e, f \in A}$$

Intuitivamente, la relazione *Q* può essere interpretata come: “la differenza tra *b* e *a* è minore o uguale alla differenza tra *d* e *c*”.

Esempio.

$a = 1$, $b = 2$, $c = 6$, $d = 9$, $e = 10$, $f = 16$

Se $(2 - 1) \leq (9 - 6)$ $\quad (9 - 6) \leq (16 - 10)$

allora $\quad (2 - 1) \leq (16 - 10)$

2) ***Q* è una relazione fortemente connessa in A×A:**

$\forall\ a, b, c, d \in A$

$a\,b\ Q\ c\,d$ ***oppure*** $c\,d\ Q\ a\,b$

Esempio. $a-b \leq c-d$ ***oppure*** $c-d \leq a-b$

3) *Q* soddisfa la legge dell’inversione di segno:

" a, b, c, d Î A

a b Q c d Þ d c Q b a

Esempio.

a = 1, b = 2, c = 6, d = 9

***(2-1)* ≤ (9-6) Þ (6-9) ≤ (1-2)**

4) ***Q*** **soddisfa alla monotonicità larga:**

" a, b, c, d Î A

a b Q c d   Þ a c Q b d

Esempio. a = 1, b = 2, c = 6, d = 9

***(2-1)* ≤ (9-6) Þ (6-1) ≤ (9-2)**

SISTEMA RELAZIONALE NUMERICO

Il sistema dei numeri reali preso nella sua strutturazione completa non sempre risulta adatto a riflettere le caratteristiche di un sistema empirico.

Generalmente le relazioni presenti in un sistema empirico implicano assunzioni molto più deboli di quelle implicite nella struttura di del sistema dei numeri reali.

Diventa perciò necessario introdurre dei sistemi relazionali il cui dominio sia l’insieme dei numeri reali (o un suo sottoinsieme), ma in cui vengano considerate valide soltanto alcune delle relazioni che in matematica sono parte del sistema dei numeri reali.

SISTEMA NUMERICO CLASSIFICATORIO

Un sistema numerico si dice classificatorio se in esso è definita soltanto la relazione di uguaglianza tra numeri.

All’interno di tale sistema i numeri possono essere considerati tra loro soltanto come uguali o diversi. Non ha nessun significato decidere se un numero precede un altro, né tantomeno eseguire una qualunque operazione aritmetica su di essi.

SERIE NUMERICA

Un sistema numerico si dice una serie numerica se in esso viene messa in evidenza soltanto la relazione “il numero x è minore del numero y”.

All’interno di tale sistema l’unica operazione consentita è di stabilire, presi due numeri qualsiasi, quale sia maggiore e quale sia minore.

QUASI-SERIE NUMERICA

Un sistema numerico si dice una quasi-serie numerica se in esso viene messa in evidenza soltanto la relazione “il numero *x* è minore o uguale al numero *y*”.

All’interno di tale sistema l’unica operazione consentita è di stabilire, presi due numeri qualsiasi, se siano uguali, se il primo sia minore del secondo o viceversa.

SISTEMA NUMERICO DELLE DIFFERENZE

E’ definita la relazione quaternaria *D*: *a*, *b*, *c*, *d* stanno tra loro nella relazione *D* se e solo se *(b-a)* **£** *(d-c)*.

La relazione quaternaria *D* introduce una relazione d’ordine largo totale tra le differenze di due elementi qualunque del sistema dei numeri reali.

SISTEMA NUMERICO ADDITIVO

$$A = \langle \boldsymbol{Re}, \text{£}, + \rangle$$

SISTEMA NUMERICO MOLTIPLICATIVO

$$A = \langle \boldsymbol{Re}, \text{£}, \cdot \rangle$$

MORFISMI

OMOMORFISMO

ISOMORFISMO

ENDOMORFISMO

AUTOMORFISMO

OMOMORFISMO

Siano A e B due insiemi relazionali dove *R* è la relazione definita in A e *Q* è la relazione definita in B.

Due sistemi relazionali A e B si dicono omomorfi se a g_i elementi di A nella relazione *R* corrispondono g_i elementi di B nella relazione *Q*.

ISOMORFISMO

Un omomorfismo tra due sistemi relazionali A e B si dice un isomorfismo se la funzione che associa i due sistemi è una corrispondenza biunivoca.

ENDOMORFISMO

Un omomorfismo si dice endomorfismo se dominio e codominio coincidono (sono lo stesso insieme).

AUTOMORFISMO

Un isomorfismo si dice automorfismo se se dominio e codominio coincidono (sono lo stesso insieme).

	f non biunivoca	f biunivoca
Il dominio non coincide con il codominio	***OMOMORFISMO***	***ISOMORFISMO***
Il dominio coincide con il codominio	***ENDOMORFISMO***	***AUTOMORFISMO***

Esempio.

Sia P un insieme di 5 persone P = {a, b, c, d, e}.
Si considerino i seguenti sistemi relazionali:

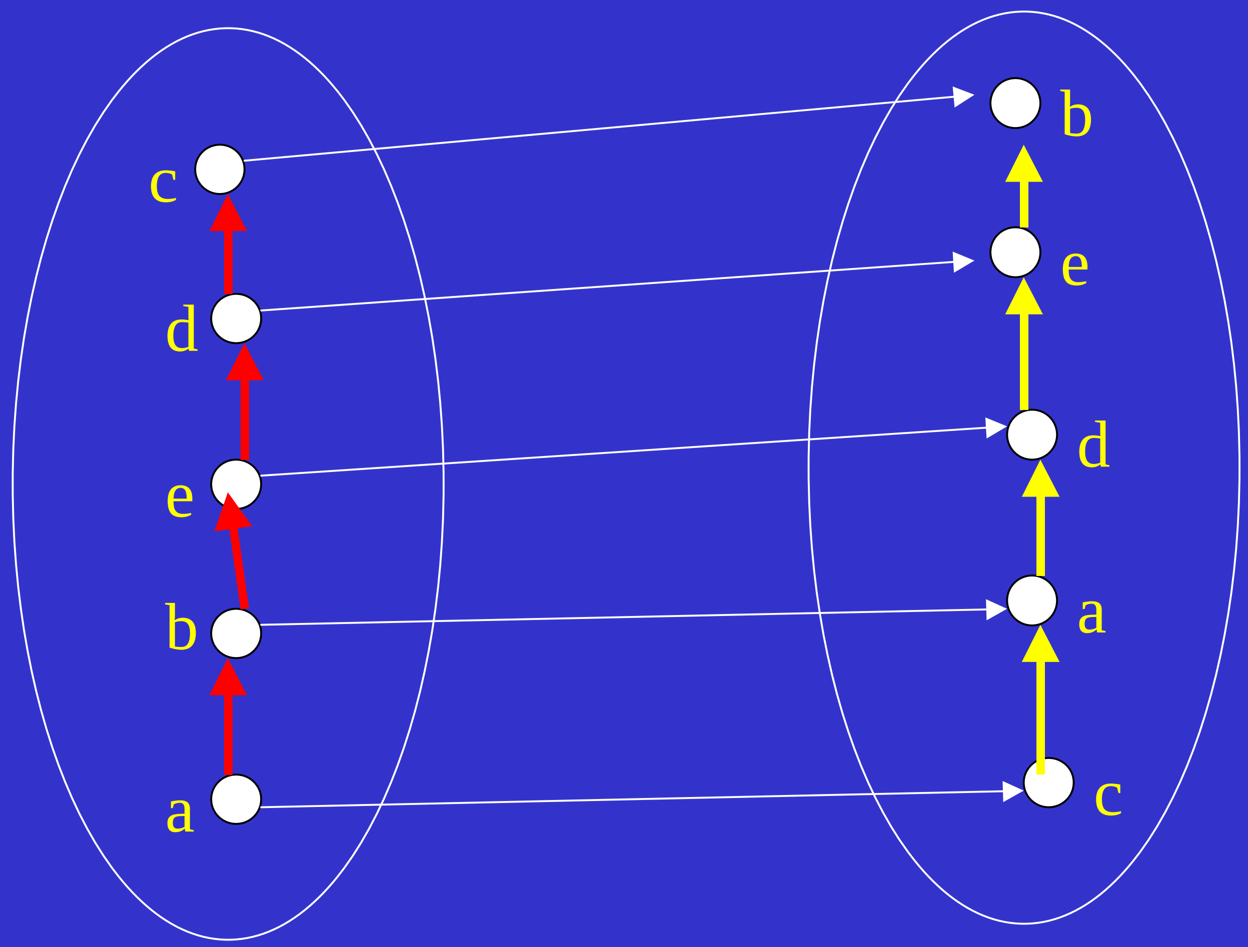
P = < P, < >   P = < P, < >

Dove < e < sono, rispettivamente, le relazioni "*essere meno aggressivo di*" e "*essere meno introverso di*".

Supponiamo che le relazioni precedenti individuino i seguenti ordinamenti stretti in *P*:

a < b < e < d < c   *"essere meno aggressivo di"*

c < a < d < e < b   *"essere meno introverso di"*



“essere meno aggressivo di”

“essere meno introverso di”

La funzione *f* che associa ad una persona meno aggressiva di un'altra, una persona meno introversa di un'altra è un ***automorfismo*** di *P*.

Infatti:

si tratta di un ***isomorfismo***, poiché *f* è una corrispondenza biunivoca

si tratta di un ***automorfismo*** poiché dominio e codominio coincidono.

	f non biunivoca	f biunivoca
Il dominio non coincide con il codominio	***OMOMORFISMO***	***ISOMORFISMO***
Il dominio coincide con il codominio	***ENDOMORFISMO***	***AUTOMORFISMO***

DEFINIZIONE DI MISURA

Misurare un sistema empirico significa individuare un sistema numerico ad esso omomorfo.

SCALA DI MISURA

Si chiama scala di misura ogni terna S = {E, M, *f*} costituita da un sistema empirico E, da un sistema numerico M che ha come dominio l'insieme dei numeri reali e da un omomorfismo *f* di E in M.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE

Un teorema di rappresentazione enuncia quali proprietà debbano essere soddisfatte dal sistema empirico e numerico affinché possa essere definito un opportuno omomorfismo.

TEOREMA DI UNICITA’

Il teorema di rappresentazione non risolve tutti i problemi relativi alla misura di un sistema empirico. Infatti le condizioni poste da tale teorema sono tali da consentire di consentire la costruzione di più di una scala di misura, ognuna delle quali gode di proprietà analoghe rispetto al sistema empirico.

Per superare questa difficoltà è necessario individuare le caratteristiche comuni a tutte le scale che si riferiscono allo stesso sistema empirico.

A questa funzione assolve il teorema di unicità che individua le condizioni per cui sia possibile passare da una scala mi misura ad un’altra definite sullo stesso sistema empirico.

TRASFORMAZIONI PERMISSIBILI

Le condizioni poste dal teorema di unicità consentono di definire una famiglia di funzioni che consentono di passare da una scala S a un'altra scala S', entrambe misura dello stesso sistema empirico.

Queste funzioni vengono dette *trasformazioni permissibili*.

SCALA ORDINALE

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE

Sia O un sistema empirico ordinato e sia O’ la serie empirica associata ad O. Se O’ è finito e numerabile è sempre possibile costruire una scala **S = {E, M, *f*}** dove $M = < Re, < >$ è una serie numerica di dominio *Re*.

TEOREMA DI UNICITA’

Ogni scala ordinale è unica a meno di trasformazioni monotòne crescenti in senso stretto.

Esempio

Viola < Marrone < Blu

Viola	Marrone	Blu
0	1	2

Viola	Marrone	Blu
4	5	112

Viola	Marrone	Blu
-3	0	1

Il teorema di unicità stabilisce che, per passare da una scala ad un'altra definita su uno stesso sistema empirico ordinato, è sufficiente applicare una *funzione monotona crescente in senso stretto*.

I numeri presentati negli esempi precedenti definiscono dunque scale di misura diverse ma egualmente appropriate per la serie empirica del "calore" dei colori.

Dal teorema di unicità deriva che i numeri assegnati agli elementi empirici in una scala ordinale consentono soltanto di stabilire che, tra quegli elementi, vi è una data gradazione nel possesso di un dato attributo.

I valori di una scala ordinale NON consentono però di stabilire in che misura l'attributo è posseduto.

Qualsiasi manipolazione aritmetica sui valori numerici che costituiscono una scala di misura ordinale è inappropriata perché tali numeri non ci dicono nulla a proposito dell'intensità con la quale un elemento empirico possiede la caratteristica considerata.

… alcuni ritengono che la quasi totalità delle misure psicologiche sia a livello di scala ordinale!!!!

SIGIFICANZA
DELLE STATISTICHE

Che cos’è una statistica?

Una statistica è una qualunque funzione che associa un numero reale a un campione di osservazioni.

Ad esempio, la media, la mediana, la varianza, la deviazione standard, la moda, il logaritmo della seconda osservazione diviso per il quadrato di n, ….

In precedenza abbiamo detto che, per ciascun tipo di scala, il teorema di unicità definisce le trasformazioni possibili a cui ciascuna scala di misura può essere soggetta.

Alla luce del fatto che ***le scale di misura possono essere trasformate in base alle trasformazioni permissibili, si pone il problema di stabilire quali statistiche debbano essere calcolate per i diversi tipi di scala***.

Succede infatti che statistiche “sensate” ad un livello di scala di misura diventino prive di senso ad un diverso livello di scala di misura.

Livello di scala	Trasformazioni possibili
Nominale	Corrispondenze biunivoche
Ordinale	Funzioni monotone crescenti in senso stretto
Intervallo	Trasformazioni lineari positive
Rapporto	Similitudini dirette

Una *statistica* calcolata sulla base delle *trasformazioni permissibili* a cui possono essere soggette le scale di misura può cambiare oppure restare immutata.

Una statistica si dice *significante* se il suo valore muta nel passare da una scala ad un'altra scala equivalente *secondo regole determinate e dipendenti dal tipo di scala*.

La determinazione delle caratteristiche a cui deve soddisfare una statistica nel passare da una scala ad un'altra per essere significante viene denominata *problema dell'invarianza delle statistiche*

Si distinguono tre tipi di *invarianza delle statistiche*: assoluta, di riferimento e di confronto.

INVARIANZA ASSOLUTA

Una statistica si dice *assolutamente invariante* se il suo valore numerico non muta come conseguenza delle trasformazioni permissibili a cui viene sottoposto un sistema numerico che misura un sistema empirico.

In altre parole, il valore di una statistica calcolata sui valori di una scala non muta se queste misure vengono trasformate mediante una trasformazione permissibile.

INVARIANZA DI RIFERIMENTO

Una statistica si dice *invariante di riferimento* quando muta in base alla medesima funzione mediante la quale si passa dal sistema numerico originario a quello trasformato.

INVARIANZA DI CONFRONTO

Siano C_1 = {X_1, X_2, …, X_n} e C_2 = {Y_1, Y_2, …, Y_k} due campioni tratti dalla medesima popolazione. Una statistica si dice *invariante di confronto* se, verificato che la statistia st_1 calcolata su C_1 è uguale alla statistia st_2 calcolata su C_2, questa uguaglianza sussiste anche quando le misure vengano trasformate in base a qualunque trasformazione permissibile.

… in conclusione, una statistica si dice *significante* se e solo se risulta possedere uno dei tre tipi di invarianza descritti in precedenza: invarianza assoluta, invarianza di riferimento, invarianza di confronto.

INVARIANZA DI RIFERIMENTO DELLA MEDIA A LIVELLO DI SCALA INTERVALLO

Sia $C = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un campione di n dati misurati a livello di scala ad intervallo.

Sia $Y = a + b\,X$ una qualunque trasformatione lineare positiva, trasformazione permissibile a livello di scala ad intervallo.

Indichiamo con $\overline{X}$ e con $\overline{Y}$ le medie di C e dei dati trasformati.

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{\sum \left(a + bX_i\right)}{n} = a + \frac{b\sum X_i}{n}$$

$$\overline{Y} = a + b\overline{X}$$

… in altre parole, la media dei dati trasformati è ottenuta applicando alla media dei dati originari la medesima trasformazione lineare positiva applicata ai dati del campione *C*.

Questo significa che *la media è significante a livello di scala ad intervalli*.

Dimostriamo ora come la media non sia significante a livello di scala ordinale e quindi neppure a livello di scala nominale.

Sia $C = \{2, 9, 5, 16\}$.

La media di C è uguale a 8.

Le trasformazioni permissibili a livello di scala ordinale sono le trasformazioni monotone crescenti in senso stretto.

Una di tali trasformazioni è $Y = \sqrt{X}$

I dati così trasformati diventano:

C	2	9	5	16
$\sqrt{C}$	1.41	3	2.25	4

La media dei dati trasformati è 2.66. Questo valore è diverso dalla radice quadrata di 8, ovvero dal valore che si otterrebbe applicando alla media di *C* la stessa trasformazione che è stata applicata ai dati del campione.

La media, dunque, non è invariante di riferimento a livello di scala ordinale.

Per stabilire che la media non è significante a livello di scala ordinale, si può verificare in maniera analoga che la media non è neppure invariante di confronto o assolutamente invariante a tale livello di scala.

INVARIANZA ASSOLUTA DEI PUNTI Z A LIVELLO DI SCALA AD INTERVALLI

X = 1,0   24,0   5,0   9,0   16,0

Y = 33 + 12 X

Y = 45,0   321,0   93,0   141,0   225,0

Statistiche descrittive

	N	Minimo	Massimo	Media	Deviazione std.
X	5	1,0000	24,0000	11,000000	9,137833
Y	5	45,0000	321,0000	165,0000	109,654001
Validi (listwise)	5				

Zx = -1,09435   1,42266   -,65661   -,21887   ,54718

Zy = -1,09435   1,42266   -,65661   -,21887   ,54718

Dato che le trasformazioni lineari fanno parte delle trasformazioni permissibili a livello di scala ad intervallo, possiamo concludere che i punti z sono statistiche assolutamente invarianti a livello di scala ad intervallo.

Analogamente, si può dimostrare che i punti *z* non sono significanti a livello di scala ordinale.

INVARIANZA DI CONFRONTO DELLA VARIANZA A LIVELLO DI SCALA AD INTERVALLO

Si considerino due campioni tratti dalla medesima popolazione misurata a livello di scala ad intervallo.

Supponiamo che i due campioni abbiano varianze uguali.

Per scale ad intervalli sono permissibile le trasformazioni lineari positive.

Se dunque applichiamo ai dati originari una qualunque trasformazione lineare positiva, allora per i dati così trasformati le varianze dei due campioni continueranno a restare uguali.

X1 = 7,0   21,0   4,0   9,0   12,0

Y = 31,0   45,0   28,0   33,0   36,0

Statistiche descrittive

	N	Minimo	Massimo	Media	Varianza
X	5	4,0000	21,0000	10,600000	42,300
Y	5	28,0000	45,0000	34,600000	42,300
Validi (listwise)	5				

X1 = 12 + 7X

X1 = 61,0   159,0   40,0   75,0   96,0

Y1 = 229,0   327,0   208,0   243,0   264,0

Statistiche descrittive

	N	Minimo	Massimo	Media	Varianza
X	5	4,0000	21,0000	10,600000	42,300
Y	5	28,0000	45,0000	34,600000	42,300
X1	5	40,0000	159,0000	86,200000	2072,700
Y1	5	208,0000	327,0000	254,2000	2072,700
Validi (listwise)	5				

In conclusione, la varianza è *invariante di confronto* a livello di scala ad intervalli.

La varianza non è invariante di riferimento né assolutamente invariante a livello di scala da intervalli.

Si può altresì dimostrare come la varianza non sia significante a livello di scala ordinale.

I tre tipi di invarianza non sono indipendenti:

invarianza assoluta	$\Rightarrow$	**invarianza di riferimento**	$\Rightarrow$	**invarianza di confronto**

Inoltre, se una statistica è significante ad un certo livello di scala, sarà significante anche ad ogni livello di scala ad esso superiore.

… quali sono le statistiche significanti ai diversi livelli di scala?

Sistema empirico	Livello di scala	Trasformazioni permissibili	Statistiche
Classificatorio	*Nominale*	*Corrispondenze biunivoche*	*Numero di classi di equivalenza* *Moda*
Ordinato	*Ordinale*	*Funzioni monotone crescenti in senso stretto*	*Mediana* *Quantili*
Delle differenze	*Intervallo*	*Trasformazioni lineari positive*	*Media* *Varianza* *Punti z*
Additivo	*Rapporto*	*Similitudini dirette*	*Coefficiente di variazione*

SCALA NOMINALE

Numero delle classi di equivalenza: ***invarianza assoluta***

Moda: ***invarianza di riferimento***

SCALA ORDINALE

Mediana: ***invarianza di riferimento***

Percentili e quartili: ***invarianza di riferimento***

SCALA INTERVALLO

Media: ***invarianza di riferimento***

Varianza e deviazione standard: ***invarianza di confronto***

Punti *z*: ***invarianza assoluta***

SCALA RAPPORTO

Coefficiente di variazione $\left(V = \frac{S}{\overline{X}} \right)$ ***invarianza assoluta***