

Educación Media

1

Matemática

Programa de Estudio
Primer Año Medio



Matemática

Programa de Estudio Primer Año Medio



Matemática
Programa de Estudio, Primer Año Medio, Formación General
Educación Media, Unidad de Currículum y Evaluación
ISBN 956-7405-75-1
Registro de Propiedad Intelectual N° 106.588
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición 1998
Segunda Edición 2004

Santiago, noviembre de 1998

Estimados docentes:

EL PRESENTE PROGRAMA DE ESTUDIO para Primer Año Medio ha sido elaborado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica en el año escolar de 1999. En sus objetivos, contenidos y actividades, procura responder a un doble propósito: articular a lo largo de un año una experiencia de aprendizaje acorde con las ambiciones formativas de la reforma en curso y ofrecer la más efectiva herramienta de apoyo al profesor o profesora que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Primer Año Medio establecen objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque mayores son los requerimientos formativos que plantea la vida futura a nuestros alumnos y alumnas. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, una de las novedades de estos programas es la inclusión de numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, es decir, de las experiencias concretas y realizables que contribuirán a lograr los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar y rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos.

Como en una obra musical, donde el efecto final no sólo depende de la partitura sino también de la pericia y espíritu de sus ejecutantes, los nuevos programas son una invitación a los docentes de Primer Año Medio para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Los nuevos programas demandan un cambio sustantivo en las prácticas docentes. Esto constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Como sistema, nos tomará algunos años el llegar a implementarlos como soñamos; lo que importa en el momento de su puesta en marcha es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo bien hecho.



José Pablo Arellano M.
Ministro de Educación

Presentación	9
Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa	12
Objetivos Fundamentales	13
Cuadro sinóptico: Unidades, contenidos y distribución temporal	14
Unidad 1: Números	16
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	18
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	27
Unidad 2: Lenguaje algebraico	30
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	32
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	40
Unidad 3: Transformaciones isométricas	44
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	46
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	52
Unidad 4: Variaciones proporcionales	54
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	56
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	63
Unidad 5: Variaciones porcentuales	66
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	68
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	73
Unidad 6: Factores y productos	76
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	78
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	84
Unidad 7: Congruencia de figuras planas	86
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos	88
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos	94
Bibliografía	97
Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios	
Primer a Cuarto Año Medio	99

Presentación

LA CIENCIA MATEMÁTICA forma parte del acervo cultural de nuestra sociedad. Es una disciplina cuya construcción ha surgido de la necesidad y/o deseo de responder y resolver situaciones provenientes de los más variados ámbitos, tanto de la matemática misma como del mundo de las ciencias naturales, sociales, del arte y de la tecnología.

El presente programa se sitúa en la perspectiva del derecho de todas las personas a desarrollar su capacidad de pensar y expresarse matemáticamente, facilitando su incorporación, de manera informada, a una sociedad en constante cambio.

En consecuencia, este programa busca aprovechar la variedad de talentos, necesidades e intereses que poseen los estudiantes para acercarlos a la matemática, estimulando a aquellos cuyos intereses se acercan más a las aplicaciones o a la modelación o a los desafíos de la disciplina misma, brindándoles oportunidades a cada uno de ellos.

Este Programa de Matemática para Primer Año de Enseñanza Media plantea como eje importante para el aprendizaje de la matemática, la resolución de problemas. Es fundamental que en esta instancia se abran espacios para que los estudiantes respondan preguntas que se hacen entre ellos o planteadas por los docentes, que fundamenten sus argumentos, que describan, expliquen y defiendan sus procedimientos y estrategias de resolución y que atiendan a las explicaciones y argumentaciones de los demás.

La resolución de desafíos y problemas es un tipo de actividad que permite, además del desarrollo de las capacidades para analizar y relacionar en un contexto diversas temáticas, dar

significado a conceptos y procedimientos matemáticos favoreciendo su aprendizaje y el desarrollo de una actitud crítica apoyada en la reflexión, acerca de diversos temas.

Es recomendable generar climas de trabajo en los que la intuición matemática, el análisis de situaciones y procedimientos, la estructuración de conceptos y los procesos de generalización tengan cabida y velar por una participación amplia de los estudiantes, sutilmente tensionada. Es conveniente dedicar tiempo para debatir acerca de las formas correctas que permiten resolver problemas específicos, los conceptos involucrados, las soluciones encontradas, etc., puesto que el reconocimiento de la diversidad de estrategias posibles y la selección de la(s) mejor(es) es otro aspecto que se desea enfatizar en el presente programa.

Para la resolución de determinados problemas podría ser interesante utilizar una calculadora (básica o científica), para familiarizar a los estudiantes con el uso de la misma, para que conozcan sus ventajas y limitaciones. Asimismo, si fuese posible, sería recomendable que los jóvenes utilicen el computador, particularmente para el desarrollo de trabajos relativos al uso de planilla de cálculo, geometría, diseño y también al álgebra. Ello dependerá del software disponible en cada establecimiento educacional.

Es importante realizar también otro tipo de actividades, como lecturas y/o investigaciones específicas y posteriores exposiciones sobre estos temas, de modo que el equipo expositor pueda recibir y contestar preguntas. En esta dirección, es el momento de explicar a los estudiantes acerca del sentido de la investigación. Debe destacarse que no basta con encontrar la información buscada, que es necesario clasificarla, organizarla, reelaborarla en una presen-

tación original. Si la investigación fuese grupal, debiera también clarificarse la distribución de tareas y responsabilidades.

Es necesario explicitar que las actividades mencionadas son sólo algunos medios para lograr aprendizajes significativos, pero no son los únicos. En ningún caso este tipo de actividad desperfila la necesidad de sistematizar y ejercitar conceptos y relaciones matemáticas.

ORGANIZACIÓN DEL PROGRAMA

El Programa de Estudio para el sector de Matemática se enmarca en las orientaciones que derivan de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Considerando los ejes temáticos de los OF-CMO, el presente programa se organiza en siete unidades:

1. *Números.*
2. *Lenguaje algebraico.*
3. *Transformaciones isométricas.*
4. *Variaciones proporcionales.*
5. *Variaciones porcentuales.*
6. *Factorizaciones y productos.*
7. *Congruencia de figuras planas.*

La secuencia anual para el trabajo en el aula se puede organizar de diversas formas, considerando distintas secuencias temáticas, estimando el tiempo que se considere adecuado para los aprendizajes en relación con las características del curso y del establecimiento educacional. En este programa, el total anual de horas se ha distribuido para dar cabida al tratamiento de las unidades propuestas, estimando un número de horas que deberá ser calibrado por los docentes de acuerdo a las realidades específicas.

Sin embargo, en ese marco de flexibilidad para la organización del trabajo anual, es recomendable tener presente las consideraciones que siguen para determinar el orden de precedencia de los temas.

La unidad *Números* es la que establece el nexo más evidente con el último año de la Educación Básica y es plataforma necesaria para el

desarrollo del trabajo docente del Primer Año Medio.

La unidad *Lenguaje algebraico* busca mostrar la potencialidad de una notación que permite fortalecer las capacidades de abstracción y generalización. Por lo mismo, puesto que resulta natural construir este lenguaje como una herramienta para generalizar nociones de la aritmética, parece recomendable tratar esta unidad a continuación de la unidad *Números*.

Una vez que se disponga de la notación algebraica, pueden tratarse las unidades *Variaciones proporcionales* y *Variaciones porcentuales*, temas ya conocidos por los estudiantes desde la Educación Básica. El hecho de disponer del lenguaje algebraico permite unificar y potenciar los aprendizajes logrados previamente en estas áreas.

La unidad *Factorizaciones y productos*, en la cual se tratan tópicos del álgebra elemental, es posterior a la de *Lenguaje Algebraico*. No es recomendable concentrar los tópicos que involucran manejo y comprensión de una notación recién conocida. Sin embargo, ello dependerá de las características propias de cada curso.

Las unidades *Transformaciones isométricas* y *Congruencia de figuras planas* constituyen un dúo que tiene orden de precedencia en el tiempo, pero que no necesariamente deben ser tratadas una a continuación de la otra: respetando el orden de precedencia, estas unidades pueden ser intercaladas de acuerdo a lo que estime la profesora o el profesor.

ORGANIZACIÓN DE LAS UNIDADES

Cada unidad incluye los siguientes puntos:

- Aprendizajes esperados.
- Contenidos.
- Orientaciones didácticas.
- Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos.
- Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos.

A continuación se señalan los aspectos más relevantes de estos elementos constitutivos de cada unidad.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Corresponden a los objetivos de aprendizaje de cada unidad. Su número es variable y, en algunos casos, hay aprendizajes esperados que por su naturaleza están incorporados en algún otro, señalados ambos de manera explícita. Los aprendizajes esperados son las metas que orientan el camino pedagógico definido en las actividades y enmarcan lo que ha de ser la evaluación final.

En su elaboración, además de considerar los contenidos y objetivos propuestos para el Primer Año Medio, se consideró como criterio importante las tres categorías señaladas en el marco curricular en cuanto al desarrollo de habilidades referidas al aprendizaje de procedimientos estandarizables, resolución de problemas y estructuración, y generalización de conceptos matemáticos.

CONTENIDOS

Los contenidos planteados son aquéllos señalados en los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, y se encuentran distribuidos en las siete unidades planteadas. En algunos casos, y con el fin de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos, éstos se han desglosado en contenidos más específicos.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

En este punto se incorporan precisiones y comentarios pedagógicos, relativos al aprendizaje propio del tema de la unidad.

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA EL APRENDIZAJE Y EJEMPLOS

Estas consideran actividades relativas a los diferentes contenidos de cada unidad y se presentan en torno a algunos temas que se consi-

deran núcleos organizadores de las mismas. En la mayoría de los casos, las actividades propuestas son ilustradas con ejemplos específicos, seguidos de un comentario pedagógico, que explicitan un determinado enfoque del tópico respectivo.

Tanto los ejemplos como las actividades sugeridas pueden servir para el logro de varios aprendizajes esperados. Ello dependerá, en muchos casos, tanto de la metodología de trabajo en el aula de cada profesor(a) como del tipo de respuesta de los estudiantes y de la dinámica general del desarrollo de la clase.

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA LA EVALUACIÓN Y EJEMPLOS

La evaluación se considera aquí como parte del proceso de construcción del aprendizaje. Debe proveer al joven y al docente de la retroalimentación necesaria para diagnosticar, corregir y orientar las actividades futuras.

Es por ello que estas sugerencias no están orientadas a una actividad específica de evaluación, sino más bien son insumos para que los profesores y profesoras los utilicen en distintas formas de evaluación, ya sea individuales, en parejas o de manera grupal.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en este programa de estudio, observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de la o las ideas planteadas. Si la evaluación es grupal, además debe considerarse la forma de trabajo del grupo y la buena utilización de los medios disponibles.

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

Los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia educativa, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva referida, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están contruidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes establecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales

definidos en el marco curricular nacional (Decreto N° 220), corresponden a una explicitación ordenada en cuatro ámbitos, – *Crecimiento y Autoafirmación Personal, Desarrollo del Pensamiento, Formación Ética, Persona y Entorno* –, de los propósitos formativos de la Educación Media; su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

Junto a lo señalado, es necesario destacar que hay una relación de afinidad y consistencia en términos de objeto temático, preguntas o problemas, entre cada sector y subsector, por un lado, y determinados OFT, por otro. El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo ('verticalizando'), los objetivos transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos), habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran explícitamente algunos de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Media.

En el programa de Matemática de Primer Año Medio, tienen especial presencia y desarrollo:

- Los OFT del ámbito *Crecimiento y*

Autoafirmación Personal referidos al interés y capacidad de conocer la realidad y utilizar el conocimiento y la información.

- Los OFT del ámbito *Desarrollo del Pensamiento*, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos, y las de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios, así como a la aplicación de leyes y principios, por un lado, y de generalización a partir de relaciones observadas, por otro.
- Los OFT del ámbito *Persona y su Entorno* referidos al trabajo, y que plantean el desarro-

llo de actitudes de rigor y perseverancia, así como de flexibilidad, originalidad y asunción del riesgo, y las capacidades de recibir y aceptar consejos y críticas.

- A través de los problemas a resolver matemáticamente que plantean las actividades del programa, es posible ampliar el trabajo de los OFT con alumnos y alumnas a su capacidad de juicio, y la aplicación de criterios morales, a problemas del medio ambiente, económicos y sociales.

Junto a lo señalado, el programa, a través de las sugerencias al docente que explicita, invita a prácticas pedagógicas que realizan los valores y orientaciones éticas de los OFT, así como sus definiciones sobre habilidades intelectuales y comunicativas.

Objetivos Fundamentales

Los alumnos y alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.
2. Analizar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias; describir y analizar situaciones con precisión.
3. Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.
4. Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.
5. Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.
6. Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas; analizar invariantes relativas a desplazamientos y cambios de ubicación utilizando el dibujo geométrico.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades			
1 Números	2 Lenguaje algebraico	3 Transformaciones isométricas	4 Variaciones proporcionales
Temas			
<ul style="list-style-type: none"> • Potencias de base un entero, un decimal o una fracción positiva y exponente un entero. Multiplicación de potencias. • Números racionales e irracionales. • Resolución de problemas, estimaciones de cálculos, redondeos. Uso de la calculadora. 	<ul style="list-style-type: none"> • Operatoria algebraica. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis. Reducción de términos semejantes. Sintaxis del lenguaje algebraico. • Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad. • Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. 	<ul style="list-style-type: none"> • Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. • Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Gráficos de distinto tipo; interpretación y lectura. • Proporcionalidad directa e inversa; constantes de proporcionalidad; su relación con un cociente o un producto constante. • Resolución de problemas. Gráficos, tablas de valores y expresión algebraica.
Distribución temporal			
Tiempo estimado: 25 a 30 horas	Tiempo estimado: 25 a 30 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas

5 Variaciones porcentuales	6 Factores y productos	7 Congruencia de figuras planas
<ul style="list-style-type: none"> • Lectura e interpretación de situaciones que involucren porcentaje. • Resolución de problemas en los que el referente asociado a 100 está implícito. • Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones. • Porcentaje como un operador multiplicativo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables. • Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos. • Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. • Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia. • Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.
Tiempo estimado: 20 a 25 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas	Tiempo estimado: 25 a 30 horas



Unidad 1

Números

Orientaciones didácticas

Durante sus años de Educación Básica las alumnas y alumnos han aprendido acerca de los números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos.

Esta unidad retoma esos conceptos y plantea fundamentalmente una profundización; se propone un trabajo que tiene como columna vertebral la resolución de problemas.

Se permite así, que los estudiantes continúen el desarrollo de sus capacidades para interpretar adecuadamente los resultados de los cálculos, para analizar los procedimientos y las respuestas a la luz de las características de los problemas; para aproximar y evaluar con claros criterios las respuestas; para describir fenómenos cuantitativos en forma cada vez más adecuada y precisa.

Además, la resolución de problemas en esta unidad, se orienta hacia el conocimiento de características y propiedades de los números racionales e irracionales; de la presencia de regularidades o patrones en el mundo de los números; de cómo las potencias facilitan la descripción de algunas situaciones numéricas relativas a incremento o crecimiento.

El tema sobre algunos antecedentes relativos a la historia de los números es un complemento necesario para que los estudiantes perciban que estos números se inventaron por imperativo de necesidades presentes en actividades diarias.

Las actividades de esta unidad se ordenan en torno a cinco núcleos temáticos:

1. Actividades con situaciones que involucran potencias con base positiva y exponente entero.
2. Actividades con situaciones que involucran números racionales, irracionales, decimales y fracciones.
3. Actividades con situaciones relativas a patrones o regularidades numéricas.
4. Actividades relativas a números racionales e irracionales.
5. Actividades acerca del desarrollo histórico de los números.

Contenidos

- Potencias de base un entero, un decimal o una fracción positiva y exponente un entero. Multiplicación de potencias.
- Resolución de desafíos y problemas numéricos orientados a la identificación de regularidades numéricas.
- Análisis de la significatividad de las cifras en la resolución de problemas. Conocimiento sobre las limitaciones de las calculadoras en relación con truncar y aproximar decimales.
- Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.
- Comentario histórico sobre la invención del cero, de los números negativos y de los decimales.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Describen ritmos de crecimiento utilizando las potencias y comparan situaciones descriptibles por adición iterada.
2. Multiplican y dividen potencias de base positiva y exponente entero, en contextos numéricos. Relacionan el cambio de signo en el exponente con el valor inverso de una potencia.
3. Conjeturan acerca de resultados y procedimientos que dan cuenta de regularidades numéricas presentes en determinados problemas.
4. Resuelven problemas que involucren operaciones aritméticas con enteros, decimales y fracciones, describiendo y analizando sus procedimientos de resolución.
5. Estiman y analizan resultados en la realización de cálculos y en la resolución de problemas y los ajustan a sus características.
6. Interpretan la información que proporciona la calculadora.
7. Diferencian entre números enteros, racionales e irracionales; los caracterizan, los expresan en notación decimal y señalan su ubicación relativa en una recta numérica.
8. Conocen algunos antecedentes sobre la historia de los enteros, los decimales y el cero.

Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

1. Actividades con situaciones que involucran potencias con base positiva y exponente entero

Actividad 1

Resolver problemas para analizar diversas situaciones que permitan visualizar ritmos de crecimiento que se pueden describir por la multiplicación o la adición iterada de un mismo número. Utilizar tablas de valores y/o diagramas de árbol para formarse una idea de los crecimientos o decrecimientos.

Ejemplo A Eugenia llama por teléfono a tres amigas y las compromete para que al día siguiente, regalen un kilo de alimentos a un hogar de ancianos y llamen a otras tres amigas para que ellas, a su vez, al día siguiente regalen un kilo de alimentos a un hogar de ancianos y llamen a otras tres amigas y así continúen con esta cadena de solidaridad.

Si todas las personas involucradas en la cadena cumplen el compromiso y tienen que enviar el kilo de alimentos al día siguiente de recibido el llamado, ¿cuántos kilogramos de alimento recibe el hogar de ancianos al cabo de 10 días?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Para abordar y visualizar formas de resolución de este problema, los estudiantes pueden utilizar el diagrama tipo árbol y/o una tabla de valores.
- Se puede recurrir a la notación con potencias para expresar la cantidad de regalos al cabo de 5, 8, 10, 20 días. La resolución de este problema abre un espacio para la estimación de resultados, comentar sobre la diversidad de maneras de hacerlo y distinguir las más eficientes, con mayor aproximación, con menor riesgo de error. En el proceso de su resolución se puede incorporar el uso de la calculadora y la multiplicación de potencias.

Ejemplo B Una empresa ofrece un incentivo económico a sus empleados además de los sueldos. Propone dos formas para que ellos elijan.

Una propuesta se inicia con \$3.000 en la primera semana los que se incrementan semanalmente en \$1.000.

La otra propuesta se inicia con \$10 en la primera semana, y se duplica semanalmente lo recibido en la semana anterior.

¿Cuál de las dos propuestas es más conveniente si el convenio tiene una duración de 10, 12, 15, 20, 30 semanas?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es conveniente apoyar la elaboración de tablas que facilitan la comparación y permiten visualizar el proceso de crecimiento de los números.
- La resolución de este problema abre espacio para la búsqueda de formas de estimación de resultados. En el proceso de su resolución, es necesario enfatizar el significado de expresiones como $3.000 + 12 \times 1.000$ y comparar con 10×2^{12} , por ejemplo.
- Este problema se puede retomar y generalizar en el trabajo de la unidad *Lenguaje algebraico* para apoyar la distinción entre las notaciones aditivas y las multiplicativas, como son $2a$ y a^2 .

Actividad 2

Resolver problemas para relacionar las potencias de base mayor que 1 con procesos de crecimiento; y aquéllas con base entre 0 y 1 con decrecimientos. Conocer el significado de la notación de potencias con exponente entero negativo y relacionar con el valor inverso de un número.

Ejemplo A Un rectángulo de cartulina de 1 mm de espesor se dobla por la mitad, sucesivamente en 20 dobleces, ¿qué hipotética altura tiene esa cartulina doblada, después del vigésimo doblez?

Si la cartulina tiene un grosor de 0,5 mm, ¿cuántos dobleces son necesarios para que tenga la misma altura que tiene la otra cartulina después del vigésimo doblez?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este problema abre las puertas a la imaginación. Es interesante que anticipen los posibles resultados tanto en relación con la primera como con la segunda pregunta.
- Es necesario que los estudiantes lleguen a expresar las relaciones numéricas en notación de potencias. Se puede generar un momento adecuado para comparar las expresiones 1×2^{20} con $0,5 \times 2^{21}$.
- Como la notación de potencias de 10 con exponente negativo es conocida por los estudiantes, se puede recurrir a esta notación para extenderla a otras bases.

$$0,1 = 1/10 = 10^{-1}$$

$$0,01 = 1/100 = 100^{-1} = 10^{-2}$$

- Al extender esta forma de notación a otras bases positivas, será necesario relacionar el significado del signo menos en el exponente, con el valor inverso del número.

$$\text{Así, } 3^{-1} = 1/3 \text{ y } 3^{-2} = (1/3)^2 = 1/9.$$

$$\text{Además, la fracción } 2/5 = (5/2)^{-1}, \text{ etc.}$$

- Es importante que los estudiantes lleguen a establecer que todo número positivo se puede escribir como potencia con exponente positivo y también con exponente negativo.

- Un error habitual en esta extensión de notación, es extender la forma de la igualdad $10^{-1} = 0,1$ a otras bases; por ejemplo, en lugar de $4^{-1} = 1/4$, los estudiantes anotan 0,4.
- Será necesario hacer ejercicios de uso de exponentes positivos y negativos, en situaciones en que ello simplifica la notación y ayuda a la comprensión y descripción de situaciones. La notación científica es uno de los usos clásicos de las potencias de base 10 con exponente negativo.

Ejemplo B Para cubrir una terraza se utilizó una carpa cuadrada de 8 m por 8 m. Para transportarla se usa una camioneta que tiene un espacio para transporte que mide 2 m de largo por 1 m de ancho. Si esta carpa se va doblando por la mitad, ¿cuántos dobleces son necesarios para que quepa bien en la camioneta?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es altamente probable que este problema se resuelva con apoyo de un dibujo o tablas de valores. Será interesante complementar esos procesos de solución con la notación numérica que los representa, como:

$$2^6 \times 2^{-1} = 2^5 \text{ (que corresponde al decrecimiento del área que genera el primer doblez);}$$

$$2^6 \times 2^{-5} = 2, \text{ (que corresponde a la situación después del quinto doblez).}$$

- La resolución de este problema abre espacio para reflexiones en torno a las potencias con base entre 0 y 1 y exponente positivo o, lo que es equivalente, con base mayor que 1 y exponente negativo.

Ejemplo C Si supones que demoras 1/5 segundos en escribir un 0, y 0,1 segundo en escribir un 1, ¿en la escritura de cuál de los siguientes números ocuparás más tiempo: $0,1^{100}$, 10^{100} , $0,1^{-100}$?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este ejemplo permite generar una imagen de un decimal con 100 cifras decimales. Sin embargo, se ubicó en este núcleo temático porque permite visualizar cómo la notación de potencia es facilitadora para expresar los números que representan grandes y pequeñas cantidades.

Ejemplo D Determinar cuál es mayor: 8^3 ó 3^8 ;
determinar cuál es mayor: $(0,8)^3$ ó $(0,3)^8$

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este ejemplo se orienta hacia la búsqueda de procedimientos para comparar potencias; y hacia la necesidad de observar tanto el signo de los exponentes y su orden de magnitud como el valor de las bases y su relación con el valor 1.
- Además pueden analizar desde 'la conmutatividad': $8 \cdot 3 = 3 \cdot 8$, relación que no se verifica en las potencias; hay una excepción: $2^4 = 4^2$. Otro tipo de ejercicio que se puede proponer es la transformación de una potencia en otra equivalente: $3^4 = 9^2$.

Actividad 3

Ejercitar la multiplicación y división de potencias con base positiva y exponente entero.

Ejemplo Completar para que las igualdades sean verdaderas.

$$3^4 : 3^8 = 3^4 \times \underline{\quad}$$

$$8^2 \times 4 = \underline{\quad}$$

$$(0,5)^2 : 2^{-2} =$$

$$3 \times 10^8 \times \underline{\quad} = 10^5$$

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En la ejercitación es importante dosificar los ejercicios de modo que el trabajo habitual se transforme en desafíos para el pensamiento y reflexión de los estudiantes y no en repeticiones reiteradas de algoritmos sin sentido. Mejor aún, si la ejercitación se puede distribuir en la medida en que se van aprendiendo formas de cálculo y de transformación numérica asociadas a los problemas.

2. Actividades con situaciones que involucran números racionales, irracionales, decimales y fracciones

Actividad

Resolver problemas de distintos ámbitos: naturaleza, deportes, trabajos u oficios, comercio, ciencias, producción, etc., que requieran no sólo la realización de cálculos con decimales y fracciones, sino que, además, generen la necesidad de hacer estimaciones y aproximar resultados, de relacionar la unidad de medida del resultado con los datos y las cifras significativas y, eventualmente, interpretar los resultados obtenidos en una calculadora.

Ejemplo A Una información de prensa de fecha 2 de junio de 1997, señala que la producción diaria de basura en Chile es 7.000 ton. Estimar un promedio de basura por casa, suponiendo cinco personas por casa y un total de 15 millones de habitantes.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- La resolución de este problema genera espacio para trabajar el concepto de cifras significativas y de aproximación.
- Si se trabaja en toneladas, y se estima la población de Chile en 15 millones, el resultado es un decimal periódico y su unidad de medida es toneladas de basura por casa.

- En ese caso, si se usara una calculadora básica, la pantalla indicaría 0,002333; si se usara una calculadora científica se obtendría en pantalla el resultado 2.333333333^{-03} . Es necesario interpretar adecuadamente estos números para resolver el problema. ¿A qué corresponde, de acuerdo con los datos del problema?
- Si se trabaja en kg en lugar de toneladas, la situación es diferente en cuanto a la forma en que el resultado aparece en la pantalla.
- Si la población de Chile se estimara en 14 millones, calcular el promedio de basura por persona se transformaría en un ejercicio de cálculo escrito simplificado o en un cálculo mental.
- Puede ser un momento adecuado para establecer las diferencias entre los decimales de extensión finita, los infinitos periódicos y aquéllos que no son periódicos.

Ejemplo B Se necesita fabricar cañones de latón para estufas de combustión lenta; los cañones deben medir 0,75 m de alto y tener diámetros de 18, 20 y 24 cm.

¿Cuántas planchas se necesitan para fabricar 10, 15, 22 cañones de cada medida?

El jefe de producción informó que las planchas de latón tienen 1,60 m por 2 m.

INDICACIONES AL DOCENTE:

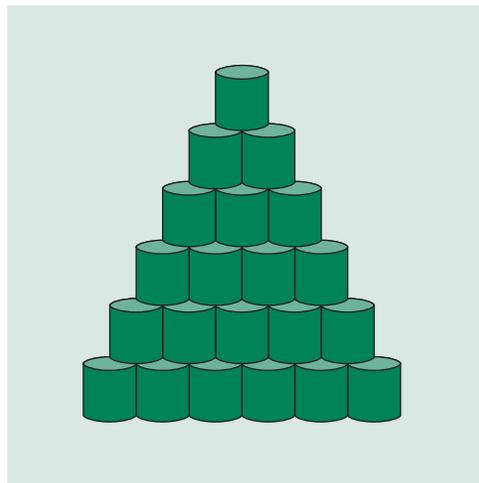
- Es probable que las alumnas y alumnos no recuerden cómo determinar el manto del cilindro; conocido o recordado ese procedimiento, pueden proceder a calcular cuántas planchas necesitan.
- Cualquiera que sea el procedimiento de resolución que utilicen, los estudiantes tendrán que aproximar cifras decimales y hacer ajustes de unidades de medida de superficie, además de tomar decisiones sobre la aproximación decimal de π en el cálculo del área del cilindro.
- Interesa destacar dos formas, de la gran diversidad que se puede presentar, para resolver este problema:
 - Una, en que las alumnas y alumnos calculan cuánto latón es necesario para hacer cada uno de los tipos de cañón; multiplican cada uno de esos resultados por 22 para saber cuánto se necesita para los 22 cañones de cada tipo; hacen la suma final. Les resulta, aproximadamente $32,2 \text{ m}^2$. Para calcular cuántas planchas son necesarias, dividen ese total por $3,2 \text{ m}^2$ que corresponde al área de una plancha. En este caso obtendrán como resultado 10,04. ¿Tiene sentido una aproximación a 10? ¿Cómo se incorpora en la resolución del problema la parte física de la construcción, por ejemplo, los centímetros necesarios para las soldaduras?
 - Otra forma de resolver este problema es hacer un esquema de diseño de los rectángulos por tipo de cañón, con las correspondientes medidas; distribuirlos en el dibujo de una plancha, considerando el mejor aprovechamiento del material y la posibilidad de hacer las soldaduras; esta es una distribución que se apoya en cálculos. A partir de este análisis, calculan la cantidad de planchas necesarias. En ambos casos la respuesta es que se necesita disponer de 11 planchas.
- En la resolución de problemas es necesario tener presente el significado de los cálculos y de los resultados; su relación con los datos planteados y la situación que los contextualiza.
- Conviene un comentario adicional respecto a las diferencias entre racionales e irracionales y sus aproximaciones decimales.

3. Actividades con situaciones relativas a patrones o regularidades numéricas

Actividad

Resolver problemas para observar, proponer y constatar la presencia de patrones o regularidades numéricas. Construir y poner en juego estrategias de solución a problemas.

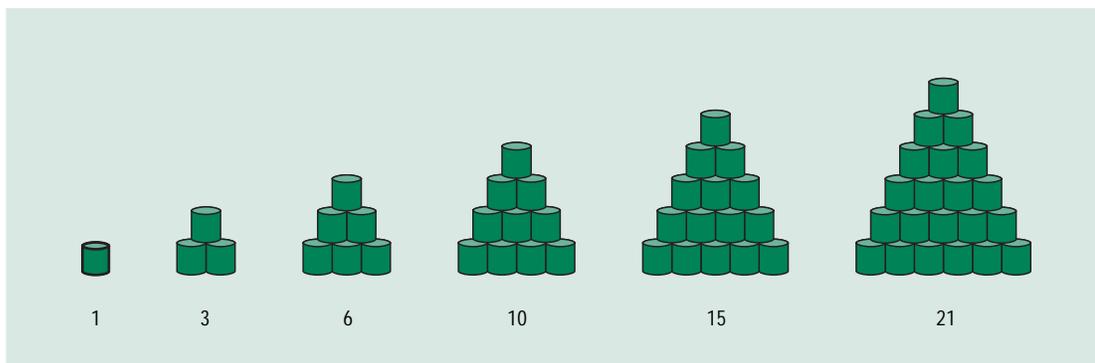
Ejemplo A José dispone los tarros de conserva en el supermercado en torres como la que indica el dibujo:



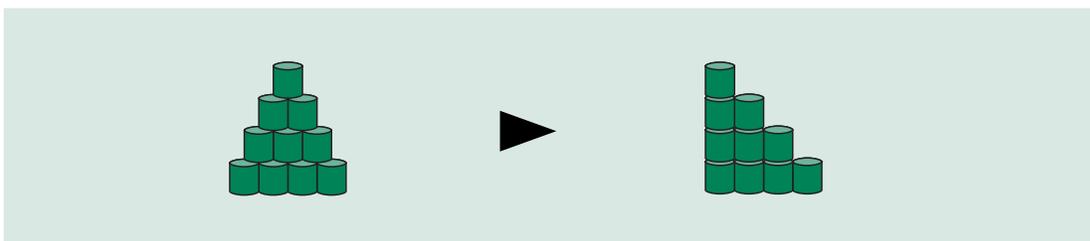
¿Cuántos tarros de conserva son necesarios para hacer una pila que tiene una base de 6, 12, 16, 20 tarros?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En el problema planteado será interesante conocer qué procedimientos utilizaron los estudiantes para resolverlo. El que se ilustra a continuación permite tener otra representación del problema:
- Los números 1, 3, 6, 10, 15, ... se denominan números triangulares porque se pueden distribuir en la forma de un triángulo.



- En cualquiera de estos triángulos, se puede calcular el número correspondiente, haciendo el siguiente arreglo, considerando cualquiera de los números triangulares.



- Esta explicación gráfica es un complemento necesario para que los estudiantes propongan otras formas de cálculo que den respuesta al problema planteado.
- Esta estrategia puede ser mostrada para un número triangular de base menor y en seguida extenderse a números triangulares de base mayor.
- Este problema puede ser retomado en la unidad de Lenguaje algebraico.

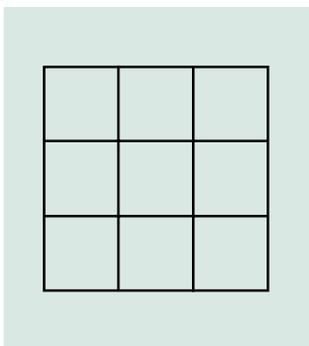
Ejemplo B Calcular la cifra de las unidades: $8^5 - 8$; $3^5 - 3$;
conjeturar sobre esta cifra considerando los otros dígitos.

Hacer un cuadro que resuma la cifra de las unidades de las segundas, terceras, cuartas y quintas potencias de los dígitos.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Será interesante observar el tipo de anticipación que se atreven a plantear los estudiantes en relación con la cifra de las unidades de la diferencia $a^5 - a$ en que a es un dígito.
- A partir del cuadro se pueden plantear algunas afirmaciones generales, tales como, si un número termina en 2, 3, 7 u 8 no es un cuadrado y otras relativas a la cuarta y quinta potencia. También se puede afirmar que si un número es cuadrado y termina en 6, entonces su raíz termina en 4 ó 6, etc.

Ejemplo C Escribir, en un cuadrado de 3×3 , los siguientes números: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, de modo que la suma de las líneas, columnas y diagonales mayores sea la misma.



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Esta es una variante de los clásicos cuadrados mágicos. Es interesante observar qué estrategia utilizan para completar los cuadrados.
- Este problema se puede ampliar a cuadrados de 4×4 , de 5×5 , etc., considerando los cuatro, cinco, ... primeros dígitos, repetidos cuatro, cinco veces. En el caso de un cuadrado de 2×2 el problema no tiene solución.
- Se puede perfilar una estrategia común para los cuadrados con número impar de cuadrados por lado.

Ejemplo D ¿Cuál es la cifra número 100 de la expresión decimal de la fracción $2/7$?

INDICACIONES AL DOCENTE:

■ Este ejemplo ayuda a visualizar la extensión periódica de las expresiones que se asocian a algunos racionales. Los períodos decimales son regularidades numéricas que no están presentes en todos los números decimales. Desde este análisis, este problema puede utilizarse para el trabajo con fracciones y decimales.

4. Actividades relativas a números racionales e irracionales

Actividad

Analizar situaciones y resolver problemas para discriminar y caracterizar los números racionales y los irracionales; su notación y/o aproximación decimal. Construir trazos que admiten como medida algunas raíces y las ubican en la recta numérica.

Ejemplo A El profesor o profesora propone las siguientes reglas del juego:

- yo pienso un número cualquiera;
- ustedes buscan maneras para descubrir cuál es el que he pensado; tienen derecho a proponer números;
- ante los números que ustedes digan yo les indicaré si es el que yo he pensado, o bien, si es mayor o menor.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es conveniente llevar un registro en el pizarrón de los números que se van diciendo y establecer un código que permita distinguir si el número pensado es mayor o menor; así es posible reconstruir la sucesión de números propuestos.
- Es conveniente pensar en un decimal con dos o tres cifras decimales.
- En cuanto a la estrategia para descubrir el número, a veces hay que orientar hacia el encajonamiento sistemático. Si el número pensado fuera 34,567, por ejemplo, los gestos y rostros expresan desconcierto en el momento en que constatan que dicho número es mayor que 34 y menor que 35.
- En cierta medida, las alumnas y alumnos logran visualizar la idea de infinitas cifras decimales.
- ¿Cómo se desarrolla este ejemplo si el número pensado es 1,3333... periódico o si el número pensado fuera π ?
- El desarrollo de esta actividad puede apoyar un proceso de sistematización sobre los decimales, los periódicos y los no periódicos.

Ejemplo B Construir trazos, en papel cuadriculado, considerando las siguientes condiciones:

- que tengan como medida un número entero: 2; 23; 12; unidades;
- que tengan como medida números decimales: $1/2$; $3/5$; 0,1; unidades;
- que tengan como medida fracciones $1/2$; $1/3$; $4/5$;
- que tengan como medida enteros, decimales e irracionales: el lado de un cuadrado de lado 5 unidades, la diagonal de ese cuadrado y un trazo que mide 0,2 unidades.

¿Cuál o cuáles pueden ser medida común en cada trío de trazos?

INDICACIONES AL DOCENTE:

■ La resolución de este problema toca diversos e importantes conceptos.

i) Remite al tema de divisores o factores comunes para el primer caso, que es una forma de comparación por cociente.

ii) Invita a reflexionar sobre la existencia de medidas comunes entre trazos cuyas medidas son números decimales y entre trazos cuya medida son fracciones que se pueden expresar como decimales periódicos.

iii) Finalmente, lleva a aceptar que no existe una común medida para el cuarto caso.

La común medida también está asociada al orden; visualizar que todos los números, racionales e irracionales, tienen su ubicación específica en la recta numérica es un desafío que involucra un grado de dificultad.

■ Este problema se puede complementar con reflexiones acerca de la insuficiencia del sistema de numeración decimal para anotar con exactitud los números irracionales.

Ejemplo C Determinar la ubicación relativa, en la recta numérica, de los números 3,1416; 3,14; π .

Puede plantear preguntas del tipo: ¿son diferentes o son el mismo? ¿Por qué?

O bien, proponer números como $\sqrt{28}$; 6; $\sqrt{20}$: ¿cuál es mayor? ¿Por qué? Utilizar una calculadora para compararlos.

INDICACIONES AL DOCENTE:

■ Además de reconocer las diferencias entre un número racional y un irracional, es interesante hacer nuevas reflexiones sobre el tema de las aproximaciones decimales.

■ Con el apoyo de una calculadora se pueden proponer otros ejemplos como indicar entre qué números se ubica $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{0,09}$; $\sqrt{2,5}$; etc.

■ Los estudiantes saben que las raíces y el número π son irracionales; apoyados en el teorema de Pitágoras, pueden construir trazos que admiten como medida algunas raíces y ubicarlas en la recta numérica.

5. Actividades acerca del desarrollo histórico de los números

Actividad

Recoger información en libros de historia de la matemática, sobre el cero, los decimales y los negativos, para que se aproximen a una percepción de que la matemática es un área del conocimiento que se desarrolla a través del tiempo.

Ejemplo A En un foro o panel discutir sobre la existencia de situaciones de la vida real que se puedan desarrollar sin números.

Ejemplo B Revisar las actividades diarias e imaginar que los números no existen, ¿qué dificultades se generarían?

Imaginar que no existen las fracciones, ¿qué tipo de actividades se limitarían o dificultarían?

INDICACIONES AL DOCENTE:

■ Para una mejor comprensión del sentido de la matemática es necesario que los estudiantes la perciban como un área del conocimiento que evoluciona y que busca respuestas a situaciones planteadas como problemas desde la sociedad y también a problemas que derivan de otras ciencias y de la matemática misma.

Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Resolver problemas para analizar diversas situaciones que permitan visualizar ritmos de crecimiento que se pueden describir por la multiplicación o la adición iterada de un mismo número.

Ejemplo A Si, día a día, una planta acuática, duplica la superficie que cubre y en 20 días cubre totalmente una piscina, ¿en cuánto tiempo se cubre esa misma piscina, si inicialmente se tienen cuatro de estas plantas?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si interpretan correctamente la información presente en el problema.
- ii) En relación con la estrategia de solución utilizada, si recurren a una tabla de valores, a un diagrama de árbol, o bien, hacen uso de algún otro tipo de representación.
- iii) En relación con la respuesta dada, si ésta refleja un crecimiento descriptible por las potencias.

Ejemplo B

Se sabe que la población de cierto tipo de insectos se cuadruplica cada año.

Si la población en este año es de 64 insectos:

- calcular la población para el quinto año.
- utilizando la notación de potencias, escribir una expresión que indique el número teórico de insectos al cabo de 10 años (se supone que todos los insectos permanecen vivos).
- determinar el número de insectos hace dos años.

INTERESA OBSERVAR:

- Si interpretan correctamente la información presente en el problema.
- En relación con la estrategia de solución utilizada, si utilizan dibujos o esquemas, tablas de valores u otro tipo de diagrama para representar la situación. Si cuadruplican los insectos año a año, si parten de 64 insectos, si dividen sucesivamente por cuatro para los años anteriores.
- Si todos los integrantes de los grupos están trabajando en forma colaborativa o en trabajos individuales.
- Si en la respuesta al punto b) utilizan la notación de potencia o hacen sucesivas multiplicaciones por 4 para determinar el número de insectos al cabo del décimo año.

Actividad 2

Resolver problemas de distintos ámbitos: naturaleza, deportes, trabajos u oficios, comercio, ciencias, producción, etc., que requieran, no sólo la realización de cálculos con decimales y fracciones, sino que, además, generen la necesidad de hacer estimaciones y aproximar resultados, de relacionar la unidad de medida del resultado con los datos y las cifras significativas y, eventualmente, interpretar los resultados obtenidos en una calculadora.

Ejemplo A El grosor que alcanzan 330 hojas de papel idénticas es de 6,8 cm. ¿Cuál es el grosor de una de esas hojas?

INTERESA OBSERVAR:

- Si interpretan correctamente la información presente en el problema.
- En relación con la realización de los cálculos y la respuesta:
 - Si hacen los cálculos con calculadora y el resultado está en notación científica, la interpretación que plantean.
 - La aproximación decimal y la unidad de medida señalada en la respuesta.

Ejemplo B Una pelota de goma rebota hasta las $\frac{3}{4}$ partes de la altura desde la que se la deja caer. Si la soltamos desde una altura de 16 metros, ¿cuál es la distancia que recorre esta pelota, una vez que toca el suelo por tercera vez?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si interpretan correctamente la información presente en el problema; ¿cómo interpretan la expresión “toca el suelo por tercera vez”?
- ii) En relación con la estrategia de solución utilizada, si hacen uso de algún tipo de representación, esquema o dibujo.
- iii) Los cálculos que realizan.

Actividad 3

Analizar situaciones y resolver problemas para discriminar y caracterizar los números racionales y los irracionales; su notación y/o aproximación decimal. Construir trazos que admiten como medida algunas raíces, y ubicarlas en la recta numérica.

Ejemplo A Sabiendo que a es un número tal que
 $23,5 < a < 23,8$
¿Entre qué números se encuentra $a + 10$; $2a - 5$?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si interpretan correctamente la información presente en la desigualdad.
- ii) Si apoyan su reflexión en una recta numérica.
- iii) Qué operatoria realizan con los extremos de la desigualdad.

Ejemplo B Considerar los siguientes números:
 $0,33$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{10}$; $0,03$; $(0,03)^2$
Reconocer, si existen, los que son iguales.
Ordenar estos números.

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si confunden $\frac{1}{3}$ con $0,33$.
- ii) Si discriminan que $(0,03)^2$ es el menor.
- iii) Si diferencian entre $0,33$ y $\frac{3}{10}$.



Unidad 2

Lenguaje algebraico

Orientaciones didácticas

Nuestras alumnas y alumnos ya se han iniciado en el uso de las letras para generalizar situaciones; por ejemplo, las letras representan medidas de longitud, en las fórmulas para el cálculo de volúmenes, áreas y perímetros de figuras geométricas.

El desarrollo de esta unidad se centra preferentemente en el desarrollo de la capacidad de generalización de situaciones que derivan del trabajo con los números o con las formas geométricas, apoyada en la potencialidad del *Lenguaje algebraico* para describir esas generalizaciones.

Como cualquier lenguaje, el *Lenguaje algebraico* tiene semántica y sintaxis; en esta unidad, el significado está referido al ámbito de la aritmética, de regularidades de figuras y patrones, y también de situaciones próximas a la experiencia diaria. Es importante entonces, para que el lenguaje algebraico tenga sentido, mantener como referente permanente estos tres contextos.

Es importante tener presente que las letras, en este contexto, representan números o categorías de números. Que un alumno pueda interpretar que $3a$ significa 3 autos es un acomodo que posteriormente será necesario superar para que logre llegar a una generalización que le permita interpretar correctamente una expresión como $3ab$.

En cuanto a la sintaxis, se enfatizan las diferencias con la aritmética porque los estudiantes tienden a generalizar sus coincidencias. La sintaxis de la operatoria aritmética no siempre coincide con la del álgebra. Por ejemplo, un alumno de primer año tiene claro que 37 es un número de dos cifras en que 3 es la cifra de las decenas y 7 la de las unidades; ab en álgebra representa el producto de “a por b” y $10a + b$ puede corresponder a un número de dos cifras en el que a es la cifra de las decenas y b la de las unidades.

En relación con la adición o sustracción también se suponen analogías que llevan a errores de sintaxis; en la adición aritmética, el resultado es un número; el resultado de una adición algebraica puede incluir signos + ó signos - ; muchos alumnos se confunden y buscan maneras de expresar resultados de la formas $5a + b$ en un monomio como $5ab$.

La interpretación de la expresión “sea a un número” suele ser reducida por muchos alumnos y alumnas a asumir a como un número entero positivo y -a como un entero negativo. Para corregir y ampliar esa interpretación, será necesario proponer variados ejemplos para llegar a generalizaciones que incorporen positivos y negativos, y también fracciones y decimales.

Las actividades de esta unidad se ordenan en torno a cuatro núcleos temáticos:

1. Actividades en las que traducen a lenguaje algebraico relaciones cuantitativas que involucren números positivos y negativos.
2. Actividades relativas a la reducción de términos semejantes y eliminación de paréntesis.
3. Actividades con situaciones que involucran resolución de problemas y ecuaciones de primer grado con una incógnita.
4. Actividades relativas a demostraciones de algunas propiedades.

Contenidos

- Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico.
- Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.
- Operatoria algebraica. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis. Reducción de términos semejantes. Sintaxis del lenguaje algebraico.
- Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad.
- Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.
- Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Utilizan letras para representar números. Evalúan expresiones algebraicas.
2. Representan categorías de números por medio de expresiones algebraicas: múltiplos de ... ; factores de ... ; mayores que ... ; números pares, etc.
3. Traducen al lenguaje algebraico relaciones cuantitativas en las que utilizan letras como incógnita. Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.
4. Conjeturan y generalizan acerca de patrones numéricos o geométricos utilizando expresiones literales.
5. Generalizan la notación de potencias y utilizan procedimientos convencionales para el cálculo de multiplicación y división de potencias.
6. Suman y restan monomios, binomios y polinomios. Reducen términos semejantes y aplican la convención de uso de paréntesis.
7. Conjeturan y demuestran propiedades numéricas asociadas a múltiplos, factores y divisibilidad.
8. Resuelven ecuaciones con coeficientes numéricos y literales. Analizan la existencia de sus soluciones.

Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

1. Actividades en las que traducen a lenguaje algebraico relaciones cuantitativas que involucran números positivos y negativos

Actividad 1

Utilizar letras y expresiones algebraicas para representar números, categorías de números, patrones numéricos o geométricos y/o relaciones cuantitativas. Comparar el lenguaje habitual con el algebraico. Leer e interpretar expresiones algebraicas.

Ejemplo A Expresar algebraicamente tipos de números como los siguientes:

- todos los números pares
- todos los impares
- números consecutivos
- pares consecutivos
- impares consecutivos
- los múltiplos de un número determinado
- las edades de tres amigos, si el de más edad es 5 años mayor que uno y 3 mayor que el otro.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En cualquiera de estos ejemplos es importante que los estudiantes se acostumbren a precisar cuál es el significado de cada letra.
- Además, los estudiantes pueden constatar la validez de las expresiones reemplazando por valores numéricos.
- Si todos escribieran de la misma manera tres números consecutivos, es recomendable presentar
 - otras alternativas: x ; $x + 1$; $x + 2$;
 - otra forma, $x - 1$; x ; $x + 1$;
 - o también, $x + 8$; $x + 7$; $x + 6$; etc.

Ejemplo B Construir sucesiones finitas de números enteros y buscar formas de expresarlas en un término general. Para ello pueden convenir un número inicial y una diferencia constante, expresar oralmente la sucesión que obtienen y escribir su expresión algebraica.

- ¿De qué formas se puede expresar algebraicamente la sucesión 23, 28, 33, 38, 43, 48?
- ¿Qué sucesión representa $34 - 7x$ para $x = 1, \dots, 8$? ¿Cuál es el menor y el mayor número de esta sucesión?

- ¿Qué sucesión representa $5x - 10$ para $x = -5, \dots, 5$? ¿Cuál es el mayor número? ¿Cuál es el menor?
- ¿Qué sucesión representa $1/(3 - x)$ para $x = -2, \dots, 5$? ¿Es posible para todos los valores?
- ¿Qué sucesión representa $x \cdot 10^{-x}$ para $x = -1, \dots, 4$?
- ¿Qué sucesión representa $1 - 4x$ con $x = 1/4, 1/2, 3/4, \dots, 2$?

Recíprocamente, pueden proponer una expresión algebraica de una sucesión para que otros la decodifiquen y precisen sus términos.

Buscan otras formas de construir sucesiones.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Registran la diversidad de expresiones algebraicas que pueden establecer.
- Para el primer caso se puede pensar en posibilidades como las siguientes:

$$5x + 3, \text{ para } 4 \leq x \leq 9$$

$$5x - 2, \text{ para } 5 \leq x \leq 10$$

$$5x + 8, \text{ para } \dots$$

- Es necesario incluir ejemplos en los que la variable asuma valores fraccionarios y decimales, positivos y negativos. Considerar fracciones en que cambia sólo el numerador o el denominador, o ambos. Además, que en el caso de las fracciones permita restringir el valor de la variable para que el denominador sea distinto de cero.
- En relación con el lenguaje algebraico, interesa que los estudiantes vayan percibiendo su potencialidad para generalizar, su precisión y cómo se diferencia del lenguaje de uso diario.

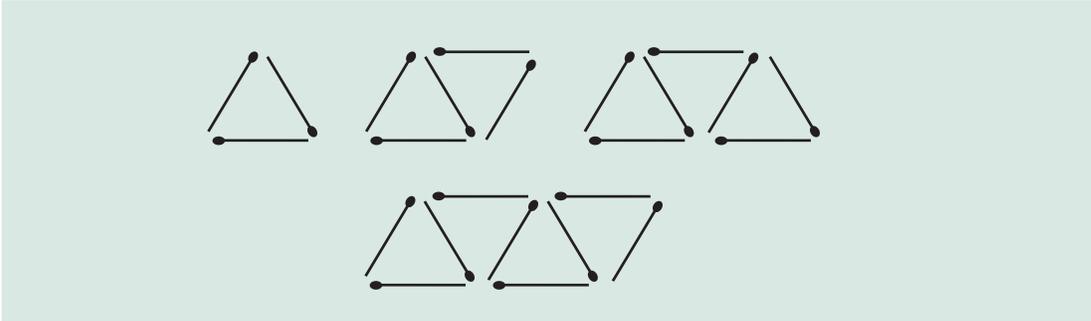
Ejemplo C Si se pintan las seis caras de un cubo grande, formado por 27 cubos más pequeños, ¿cuántos de los cubos pequeños quedan con 3, 2, 1, 0 caras pintadas?

Si el cubo grande estuviera formado por $4 \times 4 \times 4$ cubos pequeños, ¿cuántos tendrían 3, 2, 1, 0 caras pintadas?

Si el cubo está formado por $n \times n \times n$ cubos pequeños, ¿cuántos tendrían 3, 2, 1, 0 caras pintadas?

Ejemplo D Con fósforos, armar una sucesión de figuras como las siguientes:

¿Cuántos fósforos se necesitan para la décima figura y para la undécima?



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Ambos ejemplos tienen un carácter lúdico; esto puede apoyar el desarrollo de actitudes positivas hacia el aprendizaje de matemática.
- En ambos casos es conveniente organizar cuadros o tablas de registros de los datos para contar con un apoyo para la generalización.
- Este tipo de actividad se orienta hacia aprendizajes que suelen ofrecer dificultades a algunos alumnos; será necesario buscar formas de hacer lo más tangible posible el proceso de generalización.
- La propuesta con los fósforos y el triángulo se puede extender a otras figuras iniciales como cuadrados, pentágonos, hexágonos, etc.
- En este tipo de actividad es muy importante que los estudiantes comenten las diferentes estrategias utilizadas para resolver el desafío planteado. De este modo se incentiva la reflexión sobre sus propios procedimientos de pensamiento.

Actividad 2

Ordenar y representar en una recta numérica expresiones algebraicas.

Ejemplo A Sean a , b , c , tres números; si $a < 0$; $b > c$ y $b > 0$

Ubique los números en la recta

Ubique $-a$; $-c$

Ubique $a + b$

Ubique $-3a$; $5b$

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En relación con el ejemplo, será interesante observar qué deciden en relación con c , si lo ubican a la izquierda o a la derecha del cero. Este tipo de ejercicio contribuye a que las alumnas y alumnos acepten que a puede ser cualquier número (positivo o negativo), y se habitúen a interpretar y a extraer conclusiones a partir de esas representaciones.

Ejemplo B Determinar la ubicación relativa de a^2 y ab si a y b son enteros y $b < a$.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este ejemplo abre un espacio para analizar una diversidad de situaciones tales como ambos son positivos mayores que 1, ó $0 < a < 1$; si ambos son negativos, etc.

2. Actividades relativas a la reducción de términos semejantes y eliminación de paréntesis

Actividad 1

Expresar algebraicamente relaciones numéricas y reducir términos semejantes sin uso de paréntesis.

Ejemplo A Expresar algebraicamente:

- el perímetro de un rectángulo en que un lado es 3 m más largo que el otro;
- el perímetro de diferentes figuras geométricas;
- la suma de dos números pares, de tres, de cuatro, ... ;
- la suma de dos, tres, ... números impares;
- la suma de un impar con un par;
- la suma de áreas de dos o más cuadrados de lados a ó b ;
- la suma de volúmenes de cubos de aristas m ó n .

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Para muchos estudiantes es difícil reconocer que hay una gran variedad de rectángulos cuyos lados tienen 3 m de diferencia. Es necesario que perciban la diferencia entre la clase de estos rectángulos y aquellos cuyos lados miden 30 y 33 metros.
- Estos ejemplos, de una apariencia sencilla, involucran distinciones sintácticas entre las expresiones algebraicas $3m$: m^3 ; $m+3$ por plantear algunas junto a la suma y resta de términos semejantes.
- Para el aprendizaje de matemática, es muy importante que los estudiantes perciban la diferencia entre lo particular y una generalización.

Ejemplo B Anotar paréntesis en la expresión, $2a - 3b - 5 + ab$ que implique cambios de signo, sin alterar su valor.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En esta unidad conviene focalizar la atención en el uso de paréntesis para expresar la adición y sustracción de polinomios, considerando variables en primer y segundo grado. Si se considera necesario, se puede verificar el uso correcto de los paréntesis por medio de la valoración de expresiones.
- Para darle sentido, se puede recurrir a situaciones numéricas del tipo siguiente:
Diego dispone de \$3.000, compra una revista en \$820 y le regala \$550 a su hermano. ¿Qué procedimientos escritos puede utilizar Diego para calcular cuánto dinero le queda?
- Se puede proponer los dos esquemas siguientes que permiten apoyar el significado del uso de los paréntesis:

a) $3000 - 820 - 550$



b) $3000 - (820 + 550)$



- Es necesario que los estudiantes se habitúen a pasar de una forma de expresión con paréntesis a una sin paréntesis y viceversa.

Actividad 2

Utilizar la notación a^n en que a es un número positivo y n es un entero. Reducir términos semejantes, ejercitar la multiplicación y división de potencias.

Ejemplo A Verificar la igualdad de algunas expresiones algebraicas que incluyen potencias, recurriendo al significado de la notación o utilizando la valoración de expresiones.

$$a^m \cdot a^{-3} = a^m : a^{3-m}$$

$$x + y^{-1} = (xy + 1)/y$$

$$2^{m+3} \cdot 2^{2-m} = 32$$

$$(3ab)^2 = 9 a^2 b^2$$

Ejemplo B Comparar expresiones que incluyen potencias

- ¿Cuál es mayor a^b ó a^{b+1} ?
- ¿Cuál es mayor a^m ó b^m ?
- ¿Cuál es mayor $a^n b$ ó $(ab)^n$?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es importante que los estudiantes lleguen a un buen manejo de las transformaciones de escritura; que se pueda lograr un equilibrio entre la ejercitación y la comprensión.
- Que los estudiantes visualicen las diferencias, en el ejemplo B, si la base es mayor o menor que 1 y si los exponentes son positivos o negativos.
- En relación con el uso de paréntesis es importante mostrar la diferencia entre el significado de $2a^n$ y $(2a)^n$.

3. Actividades con situaciones que involucran resolución de problemas y ecuaciones de primer grado con una incógnita

Actividad 1

Resolver problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita y proponer problemas a partir de una ecuación dada.

Ejemplo A Pedro y Cecilia tienen entre los dos 57 láminas y Cecilia tiene 11 más que Pedro, ¿cuántas láminas tiene cada uno?

Ejemplo B Ana María decide salir a correr todas las mañanas y se desafía a sí misma a aumentar su recorrido en $1/2$ km, por día. Sumando lo recorrido cada día, al cabo de 9 días el recorrido acumulado es igual a 58,5 km, ¿cuánto corrió el décimo día?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- El primer problema se puede resolver aritméticamente, aunque muchos utilizan el método de ensayo y error, con apoyo de una tabla para ordenar los valores; para el segundo, es menos claro un procedimiento aritmético. Es importante que los estudiantes se habitúen a establecer en primer lugar qué designa la incógnita.
- La intención es perfilar la ecuación como una herramienta que permite sintetizar las relaciones entre los datos del problema. Además, organiza los cálculos necesarios para determinar el valor de la incógnita.
- A veces los estudiantes suponen que resuelta la ecuación está resuelto el problema. Es necesario que se habitúen a explicar la respuesta al problema.
- En el caso del segundo ejemplo podría considerarse que la incógnita correspondiera al quinto día; con esa decisión, al efectuar la suma se obtiene: $9x = 58,5$.

Actividad 2

Proponer problemas a partir de ecuaciones determinadas.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Los estudiantes pueden plantear diversos problemas, relativos a dinero, edades, tiempo, medidas, número de personas, etc. Analizan la diversidad de problemas que se pueden resolver por medio de una misma ecuación.
- Interesa que las alumnas y alumnos se percaten de que una misma ecuación puede representar una diversidad de problemas.

Actividad 3

Analizar ecuaciones y señalar las condiciones para que tengan solución.

Ejemplo Analizar las ecuaciones

$$2(x + 5) = 5x - (3x - 8)$$

$$2(x + 7) - 3 = 2x + 11$$

$$x - 5 + (x + 3) = 3a + x$$

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Que los estudiantes resuelvan y analicen diversas ecuaciones con coeficientes numéricos y con coeficientes literales. Que se acostumbren a soluciones enteras, decimales y fraccionarias: positivas y negativas. Además es muy interesante discutir la existencia de soluciones.

Actividad 4

Argumentar razonadamente para fundamentar y validar sus aseveraciones.

Ejemplo A Demostrar que la suma de tres números consecutivos es siempre múltiplo de 3.

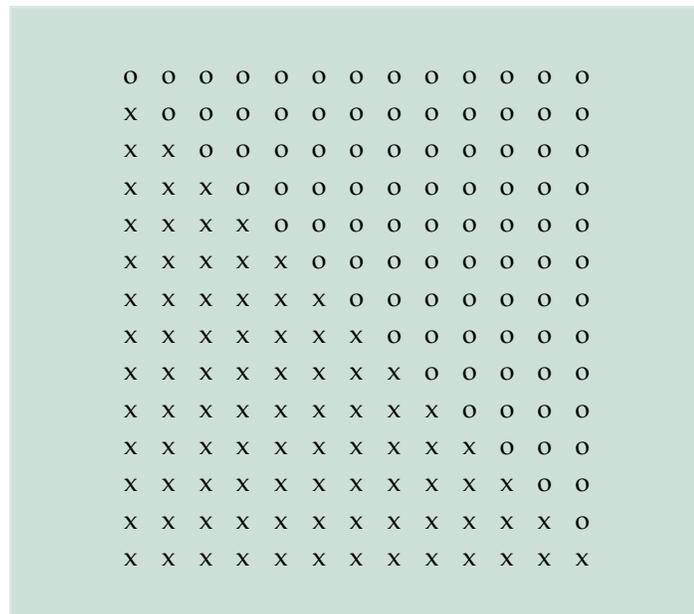
INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es muy importante observar cómo los estudiantes abordan este desafío; ¿logran simbolizar tres números cualesquiera o plantean ejemplos con tres números específicos?

Ejemplo B Determinar la suma de los n primeros números naturales.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Esta es otra manera de preguntar por los números triangulares y el problema planteado en la unidad **Números**.
- Es probable que sea necesario dar algunas orientaciones para obtener esta suma. Una alternativa es una representación gráfica al estilo de cómo se pueden ordenar los tarros de conserva en un supermercado; el dibujo que sigue indica la suma de los 13 primeros números naturales, utilizando un rectángulo de 13×14 .



- También se puede orientar por un lado más numérico, al estilo de cómo Gauss obtuvo la suma de los 100 primeros números naturales, ordenando los números para obtener sumas parciales iguales: $1 + 13 = 2 + 12 = \dots = 14$, lo que equivale a las columnas de la representación anterior.

Ejemplo C ¿Para cuáles valores enteros positivos de n , la expresión $36/(n + 2)$ es un número entero?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Siempre es interesante comparar las estrategias de resolución de los problemas. Es posible que para éste, algunos hayan probado con los 34 números, tomados sucesivamente a partir de 1. Otros, en cambio, pueden haber partido seleccionando los divisores de 36. Es necesario destacar la importancia de una buena estrategia, en términos de economía de tiempo, claridad, precisión, poder de síntesis.

Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Utilizar letras y expresiones algebraicas para representar números, categorías de números, patrones numéricos o geométricos y/o relaciones cuantitativas. Comparar el lenguaje habitual con el algebraico. Leer e interpretar expresiones algebraicas. Ordenar y representar en una recta numérica expresiones algebraicas.

Ejemplo A Para determinar los tres números consecutivos cuya suma es 1.011, un estudiante escribe:

$$(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 1.011.$$

¿Qué representa n en esa ecuación?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si resuelven la ecuación y calculan el valor de n .
- ii) Si sin resolver la ecuación indican que n es el anterior al menor número del trío.

Ejemplo B En un texto dice que $2n + 1$ representa los números impares. Otro texto dice que es $2n - 1$. En cada caso, ¿qué valor toma n para expresar el vigésimo número impar?

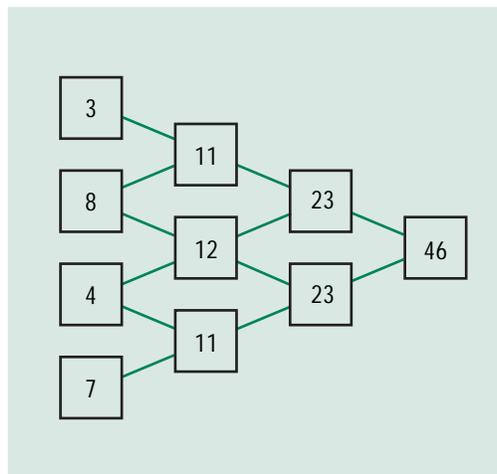
INTERESA OBSERVAR:

- i) Si determinan numéricamente cuál es el número impar y si calculan n en cada caso.
- ii) Si diferencian qué valor toma n para el número 1 y extrapolan para el vigésimo.
- iii) Si buscan otra manera de discernir.

Ejemplo C Este es una propuesta para desarrollarla en grupos de trabajo.

El diagrama que sigue muestra una forma de ubicar los dígitos 3, 4, 7, 8; se suman de dos en dos y se obtiene un resultado final.

¿Cómo se ordenan inicialmente los números para que la suma final sea la máxima?



INTERESA OBSERVAR:

- Si cambian los números al azar en la primera columna.
- Si tienen algún método o sistema de trabajo, si hacen algún tanteo sistemático.
- Si utilizan letras para representar los números.

Ejemplo D Si $x = 0,00001$, ordenar los siguientes números

$$3 + x; 3 - x; 3x; 3/x;$$

INTERESA OBSERVAR:

- Si hacen todos los cálculos y los ordenan posteriormente (incluso podría ser con calculadora).
- Si ordenan sin hacer cálculos sino que por el significado de un decimal menor que 1 en un cálculo.

Actividad 2

Utilizar la notación a^n en que a es un número positivo y n es un entero. Reducir términos semejantes, ejercitar la multiplicación y división de potencias.

- Ejemplo Una empresa ofrece un incentivo económico a sus empleados además de los sueldos. Propone dos formas para que ellos elijan.
- Una propuesta se inicia con \$3.000 en la primera semana los que se incrementan semanalmente en \$1.000.
- La otra propuesta se inicia con \$10 en la primera semana, y se duplica semanalmente lo recibido en la semana anterior.
- ¿Qué expresiones traducen estas situaciones para la n ésima semana?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si comprenden el problema.
- ii) Si recurren a una tabla de valores o a un diagrama que les ayude a encontrar la forma de notación.
- iii) Si logran establecer que el exponente y el factor para la n ésima semana es $(n - 1)$.

Actividad 3

Proponer problemas a partir de ecuaciones determinadas.

- Ejemplo Esta propuesta es para trabajo en grupo.
- Inventar problemas a partir de algunas ecuaciones sencillas, tales como $2x + 5 = 34$;
 $x + 5.600 = 10.000$; $300 - x = 770$.

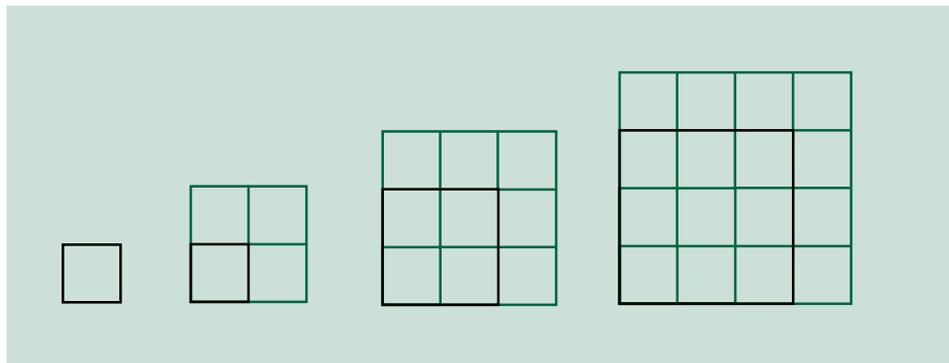
INTERESA OBSERVAR:

- i) Si los problemas propuestos son acordes con las ecuaciones.
- ii) Los temas incorporados a los problemas.

Actividad 4

Argumentar razonadamente para fundamentar y validar las aseveraciones.

Ejemplo Observar el diagrama siguiente:



Describir la regla de formación, indicando el número de cuadraditos que se agregan cada vez y el número que corresponde al total de cuadraditos en cada caso.

Considerando la descripción anterior, ¿cuánto es $1 + 3 + 5 + \dots + 55$?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Los análisis que realicen para determinar la ley de formación de las figuras.
- ii) Cómo determinan cuál es el cuadrado asociado a la suma propuesta.



Unidad 3

Transformaciones isométricas

Orientaciones didácticas

Este es un tema no tradicional en los programas de estudio en nuestro país. El aprendizaje de algunas propiedades de las figuras geométricas y la visualización de regularidades en ellas cobra relevancia en esta unidad. Además, su relación tan íntima con la congruencia, tópico habitual en nuestra Educación Media, convierten a las *Transformaciones isométricas* en un tema casi ineludible.

Su estrecha relación con la expresión artística, apoyada en la construcción geométrica, les otorga múltiples facetas. Su aprendizaje favorece el desarrollo de habilidades asociadas al sentido espacial, al dominio de propiedades geométricas de algunas figuras y al desarrollo de habilidades intelectuales.

Las *Transformaciones isométricas* pueden ser incorporadas en cualquier lugar de la secuencia de unidades, siendo recomendable que preceda en el tiempo a la unidad *Congruencia de figuras planas*.

La propuesta de actividades en esta unidad se ordena en torno a dos núcleos temáticos:

1. Actividades en torno a la posibilidad de embaldosar superficies planas con figuras geométricas.
2. Actividades asociadas al diseño, descripción y reconocimiento de transformaciones isométricas.

Contenidos

- Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.
- Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados.
- Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.
- Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Relacionan y analizan propiedades de figuras geométricas en contextos de embaldosamiento de una superficie plana.
2. Caracterizan la traslación, simetría y rotación de figuras en un plano.
3. Describen los cambios que observan entre una figura y su imagen por traslación, rotación o simetría.
4. Construyen, utilizando escuadra y compás o un programa computacional, figuras simétricas, trasladadas y rotadas.
5. Diseñan composiciones sencillas que incorporan traslaciones, simetrías y rotaciones.
6. Reconocen simetrías, rotaciones y traslaciones en la naturaleza y en obras de arte tales como las de M.C.Escher, el palacio de la Alhambra, algunas artesanías, etc.
7. Describen patrones que se observan en la aplicación de simetrías, rotaciones y traslaciones en un sistema de coordenadas.

Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Analizar relaciones y propiedades de figuras geométricas que derivan de la posibilidad de embaldosar superficies planas.

Ejemplo A Disponiendo de triángulos de diversos tipos, constatar si es posible embaldosar una superficie plana yuxtaponiendo los lados de baldosas triangulares y sin que queden intersticios entre ellas.

Los estudiantes pueden anticipar si esto es posible o no, antes de manipular esas “baldosas” y, luego, constatarlo.

INDICACIONES AL DOCENTE:

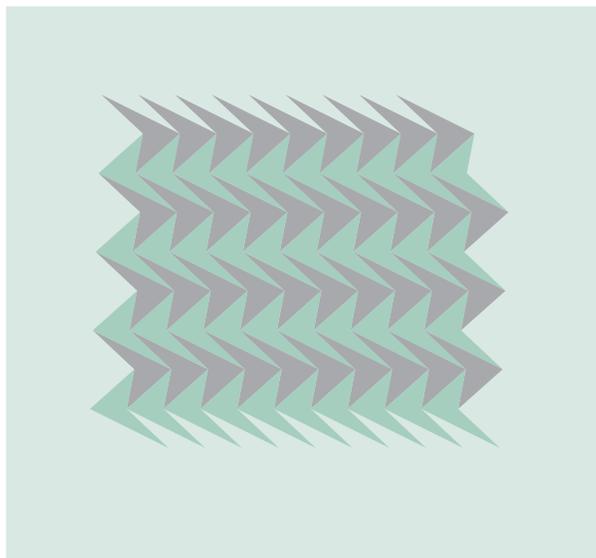
■ Es muy probable que los estudiantes acepten que con triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos se pueda embaldosar una superficie plana. Generalmente anticipan que esto no es posible con triángulos escalenos.

Importa que los estudiantes se den cuenta que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es una propiedad determinante para que este embaldosamiento sea posible.

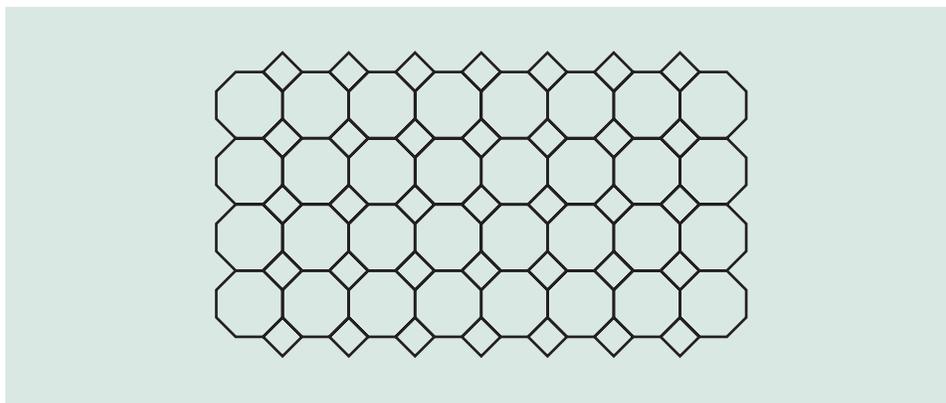
Ejemplo B Considerar otras formas geométricas: cuadriláteros (cóncavos y convexos), pentágonos, hexágonos, círculos. Los jóvenes anticipan y constatan con cuáles es posible embaldosar el plano, explicando sus razones.

INDICACIONES AL DOCENTE:

■ Generalmente aceptan que es posible embaldosar una superficie plana con paralelogramos. La tendencia es a conjeturar que no es posible si se trata de un cuadrilátero cóncavo. Sería recomendable que los propios jóvenes muestren la falsedad de esta conjetura.



- En este ejemplo, además de la propiedad relativa a la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, es importante que los estudiantes describan el tipo de movimiento que realizan para adosar una “baldosa” junto a la otra. Colorearlas permite visualizar más claramente qué movimientos se realizan con estas “baldosas” para lograr ubicarlas correctamente.
- Sería interesante analizar con qué polígonos se puede embaldosar una superficie plana y con cuáles no. En el caso de los polígonos regulares la medida del ángulo interior debe ser un divisor de 360° propiedad que cumple el cuadrado, el triángulo equilátero, el hexágono regular, pero no el pentágono regular.
- El tipo de dibujos en los que se puede embaldosar el plano, se conoce bajo el nombre de *teselación* adaptado del vocablo inglés “tessellation”.
- Cabe señalar que pueden hacerse teselaciones combinando diferentes figuras geométricas. Podría invitarse a los estudiantes a construir algunas de éstas combinando dos polígonos regulares, como por ejemplo:



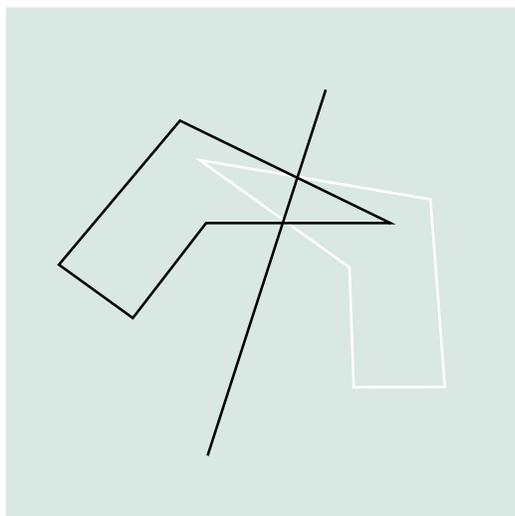
- Puede motivarse a los estudiantes para investigar sobre los diseños de embaldosamiento que existan en su localidad (plazas, veredas, mosaicos en edificios, etc.). Sería recomendable que presenten los resultados de su investigación en una exposición al curso, mostrando bosquejos de sus observaciones y señalando con precisión las transformaciones involucradas.

Actividad 2

Caracterizar traslación, simetría y rotación. Describir los cambios que genera su aplicación y utilizarlas para construir figuras. Transformar figuras por simetría y traslación en un sistema cartesiano de coordenadas y analizarlas.

Ejemplo A Para inducir las características de la simetría, los estudiantes dibujan una recta junto a una figura simple. Recurren a formas para dibujar la simétrica de esa figura, considerando la recta como eje de simetría; podrán doblar el papel, calcar a contraluz, etc.

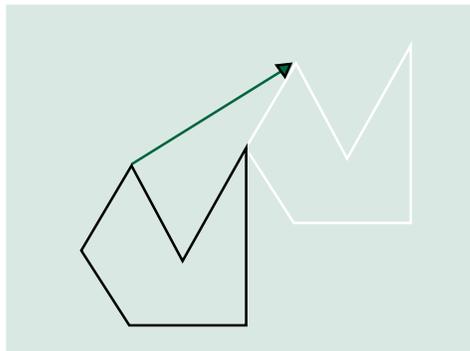
Posteriormente se pide dibujar por simetría la imagen de una figura, como la que se indica en el dibujo siguiente, sin calcarla sino que utilizando regla, escuadra, compás y transportador.



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Los estudiantes tienen menos dificultad para cumplir esta tarea si el eje de simetría es paralelo a los bordes de la hoja. Una situación como la que se presenta en el dibujo, permite destacar con mayor precisión los conceptos de distancia y perpendicularidad como propiedades que definen una simetría.
- Es importante que los estudiantes se den cuenta que propiedades tales como el paralelismo entre segmentos, la medida de los ángulos y la medida de los segmentos no se alteran al aplicar esta transformación.

Ejemplo B Para inducir las características y la construcción de figuras por traslación, redibujar una figura dada, desplazándola en la dirección, sentido y magnitud que indica la flecha. (Ver dibujo siguiente).

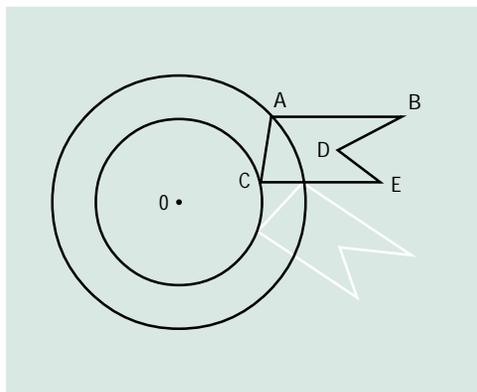


INDICACIONES AL DOCENTE:

■ Es necesario recalcar que bastaría con trasladar sólo los vértices de la figura, en la dirección, sentido y magnitud que indica la flecha.

Ejemplo C Para inducir las características de la rotación, trazar dos circunferencias concéntricas, cuyo centro es un punto que pasará a ser el centro de rotación O .

Dibujar una figura de modo que dos de sus vértices pertenezcan a cada una de las circunferencias concéntricas como lo indica el siguiente dibujo:



Recortar una figura congruente con $ABDEC$, superponerla a ésta y desplazarla de modo que el vértice C y el vértice A sigan perteneciendo a las respectivas circunferencias.

¿Recorrieron los puntos de esta figura el mismo ángulo?

Si se rota en 90° y se comparan ambas, ¿son paralelos o perpendiculares los lados AB y su correspondiente en la figura rotada?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es necesario precisar los conceptos arco y ángulo; visualizar que las longitudes de los arcos dependen de la distancia al centro de giro; la medida de los ángulos, en cambio, no depende de la longitud del arco.
- Especial mención merece la rotación en 180° , en torno a un centro de rotación, que también se denomina simetría central.
- ¿Se conserva con esta transformación el paralelismo entre los segmentos de la figura, la medida de sus ángulos y la medida de los segmentos?

2. Actividades asociadas al diseño y la descripción de transformación isométrica

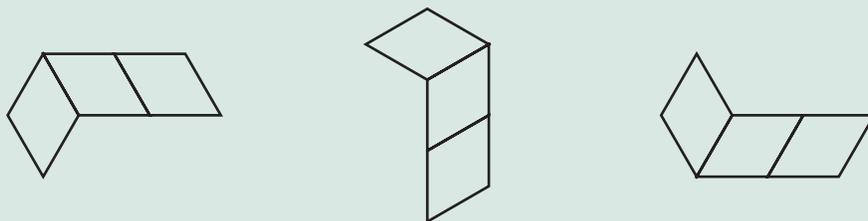
Actividad

Diseñar composiciones sencillas y describir y analizar transformaciones isométricas presentes en el arte, en la naturaleza, en el mundo de la ciencia y/o en diseños estructurales y tecnológicos.

Ejemplo A Considerar rombos congruentes de ángulos de 60° y 120° . Al combinar dos de estos rombos se pueden obtener las dos figuras siguientes:

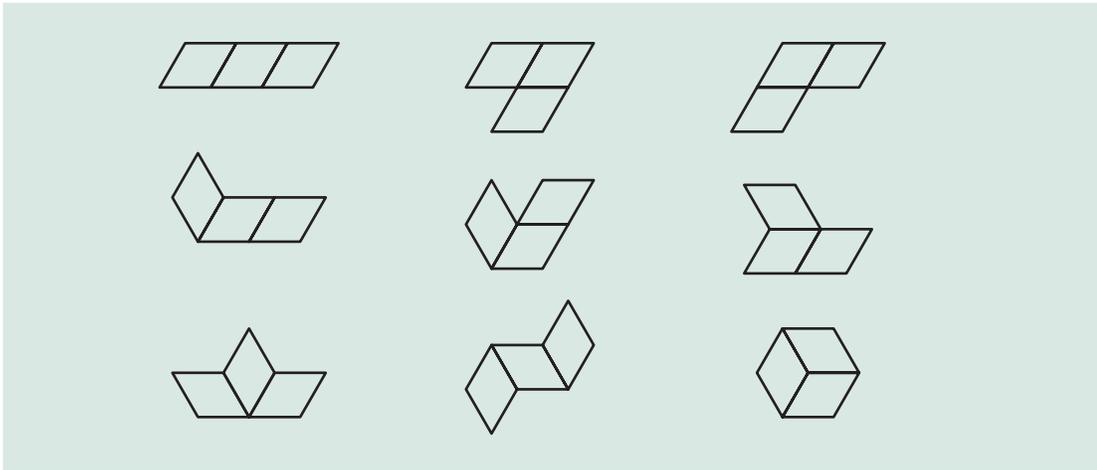


Encontrar todas las figuras diferentes que se pueden generar por combinaciones de tres de estos rombos. Las tres figuras siguientes se consideran iguales porque entre ellas se puede establecer una isometría.



INDICACIONES AL DOCENTE:

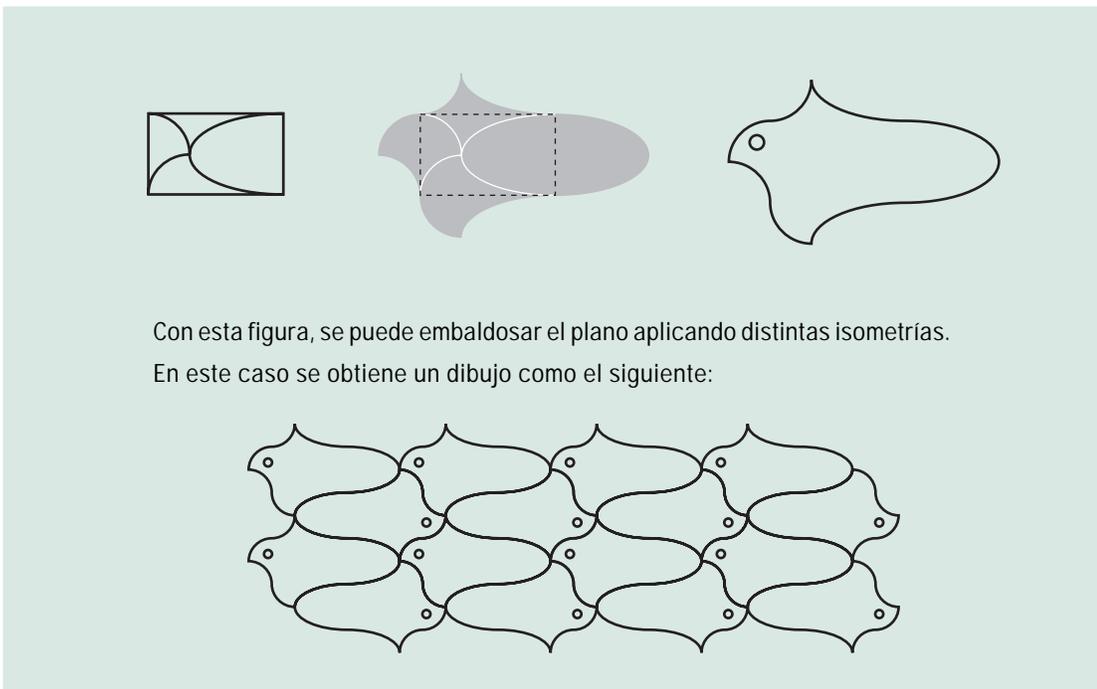
- Esta actividad que se puede realizar con manipulación de figuras o dibujos de las mismas, permite profundizar sobre las transformaciones isométricas. Son 9 los tríos diferentes de rombos que se pueden generar:



Ejemplo B Para esta actividad se necesita un sobre cerrado y una tijera.

Marcar un punto en cualquiera de los lados del sobre. Con el tipo de línea que deseen, unir ese punto con los vértices del sobre, como lo indica el siguiente dibujo.

Cortar sólo una de las caras del sobre según estas líneas y extender el papel.

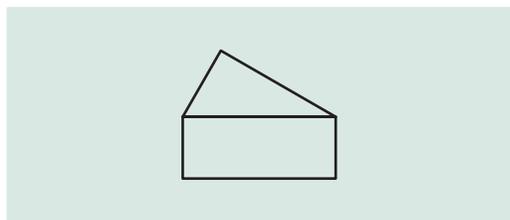


Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Analizar relaciones y propiedades de figuras geométricas que derivan de la posibilidad de embaldosar superficies planas.

- Ejemplo ¿Será posible embaldosar una superficie plana con una figura como la siguiente?
¿Qué condiciones debería satisfacer el triángulo para que esto fuera posible?



INTERESA OBSERVAR:

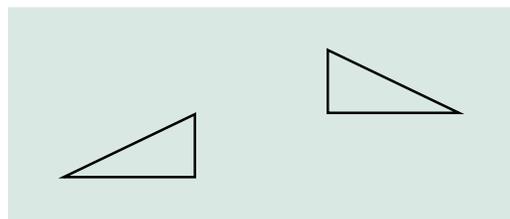
- i) Qué tipo de análisis realizan, si copian la figura, la recortan, lo intentan con dibujos, etc.

Actividad 2

Caracterizar traslación, simetría y rotación. Describir los cambios que genera su aplicación y utilizarlas para construir figuras. Transformar figuras por simetría y traslación en un sistema cartesiano de coordenadas, y analizarlas

- Ejemplo A Estos ejercicios se podrían desarrollar en grupos de trabajo.

1. Considerar los triángulos del siguiente dibujo:

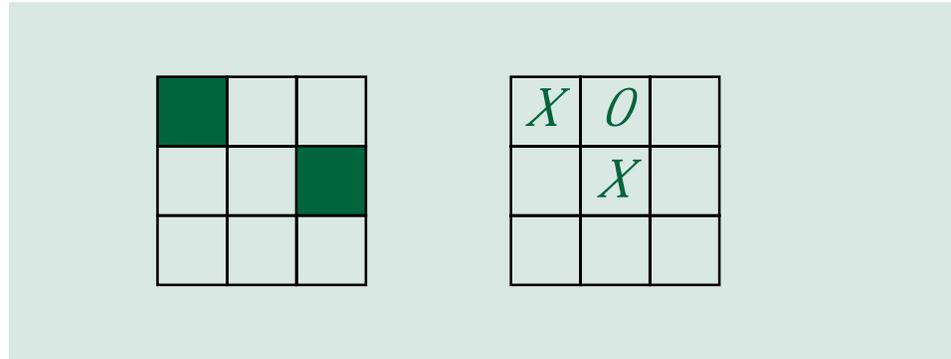


- ¿Qué transformación o sucesión de transformaciones permite pasar de un triángulo al otro?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Qué tipo de manipulación, de dibujo o esquema hacen en la figura.
ii) Si logran visualizar que hay una simetría.
iii) Si plantean diversas soluciones.

Ejemplo B Completar los dibujos siguientes de modo que al rotarlos en 180°, resulten las mismas figuras.



INTERESA OBSERVAR:

- i) Si mueven la figura o si la dejan fija cambiándose de lugar.
- ii) Qué tipo de discusión se produce, qué proposiciones surgen y por qué.

Actividad 3

Diseñar composiciones sencillas y describir y analizar transformaciones isométricas presentes en el arte, la naturaleza, el mundo de la ciencia y/o en diseños estructurales y tecnológicos.

Esta es una propuesta para trabajar en conjunto con el sector de Artes Visuales.

Ejemplo Diseñar un figura utilizando la técnica del sobre u otra; con esta figura cubrir una hoja en blanco, colorear y montar una pequeña exposición de los trabajos realizados.

INTERESA OBSERVAR:

- i) Qué procedimientos utilizan para definir la forma de la baldosa.
- ii) La forma en que realizan el proceso de embaldosar.



Unidad 4

Variaciones proporcionales

Orientaciones didácticas

El estudio sistemático de las *Variaciones proporcionales* se inicia en la Educación Básica y ahora interesa profundizarlas, incorporando las relaciones entre la representación gráfica, las tablas de valores y las constantes de proporcionalidad.

A partir de un trabajo de lectura e interpretación de gráficos, se propone el análisis, para el primer cuadrante del modelo lineal. En Segundo Año Medio, continua este estudio, generalizando al modelo de la ecuación de la recta.

La proporcionalidad directa está presente en numerosas y variadas situaciones cotidianas; ha sido tema de estudio desde el tiempo de los griegos y, en la historia de la educación, en nuestro país, ha pasado desde la regla de tres al trabajo con igualdad de razones; desde la notación con dos puntos (:) y su lectura “es a” a la notación fraccionaria. Un punto interesante para la reflexión pedagógica se refiere a la relación entre razones y fracciones.

Las actividades de esta unidad están ordenadas considerando los siguientes núcleos temáticos:

1. Actividades relacionadas con la lectura e interpretación de gráficos.
2. Actividades asociadas a la proporcionalidad directa.
3. Actividades asociadas a la proporcionalidad inversa.

Contenidos

- Noción de variable. Análisis y descripción de fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad.
- Tablas y gráficos de distinto tipo; interpretación y lectura; variables continuas y discretas.
- Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directas o proporciones inversas. Resolución de ecuaciones con proporciones.
- Proporcionalidad directa; razones internas y constante de proporcionalidad.
- Proporcionalidad inversa; razones inversas.
- Construcción y análisis de tablas y gráficos asociados a la proporcionalidad directa y a la proporcionalidad inversa (primer cuadrante).
- Relación entre las tablas, los gráficos y la expresión algebraica de la proporcionalidad directa e inversa.
- Relación entre la proporcionalidad directa y cuocientes constantes y entre la proporcionalidad inversa y productos constantes.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Leen e interpretan gráficos de uso habitual en los medios de comunicación o que reflejan situaciones próximas a su experiencia.
2. Identifican las variables involucradas en un gráfico e interpretan las modificaciones en sus valores.
3. Resuelven problemas de proporcionalidad directa; los representan utilizando diversos registros (tabla de valores, gráfico y expresión algebraica).
4. Resuelven ecuaciones con proporciones.
5. Analizan y comparan gráficos de variación proporcional directa.
6. Relacionan la constante de proporcionalidad directa con un cuociente constante.
7. Resuelven problemas de proporcionalidad inversa; los representan utilizando diversos registros (tabla de valores, gráfico y expresión algebraica).
8. Relacionan la constante de proporcionalidad inversa con un producto constante.

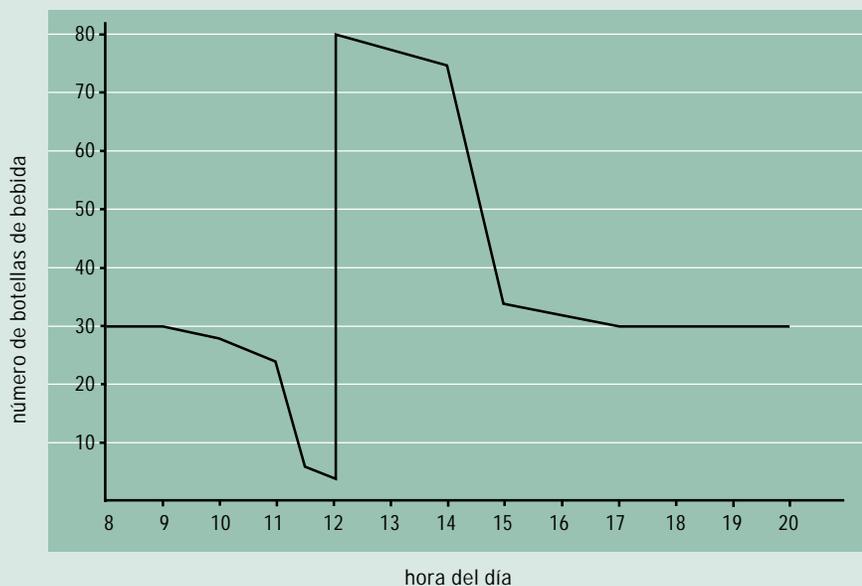
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

1. Actividades relacionadas con la lectura e interpretación de gráficos

Actividad

Leer, interpretar y comunicar información sintetizada en gráficos de diversos tipos: de barra, poligonales, circulares, pictogramas variados; que se refieran a diversidad de temas. Reconocer las variables consideradas, qué representan los ejes, el significado de los cambios en los valores de las variables.

Ejemplo A En un instituto de estudios se instaló un máquina que expende botellas de bebidas refrescantes. Durante un día, la empresa dueña de la máquina hizo un estudio sobre la venta de las bebidas entre las ocho de la mañana y las ocho de la tarde. Este estudio quedó registrado en el gráfico siguiente:



Responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas botellas de bebida había a las 8 de la mañana?
- ¿En qué períodos no se ha retirado ninguna botella?
- Entre las 11:00 y las 11:30 horas hay recreo, ¿cuántas botellas se retiraron en ese período?

- ¿A qué hora se volvió a llenar la máquina?
- ¿Cuándo se han consumido más bebidas por hora: en el recreo o durante el almuerzo?
- ¿A qué hora se supone terminan las clases en ese instituto?

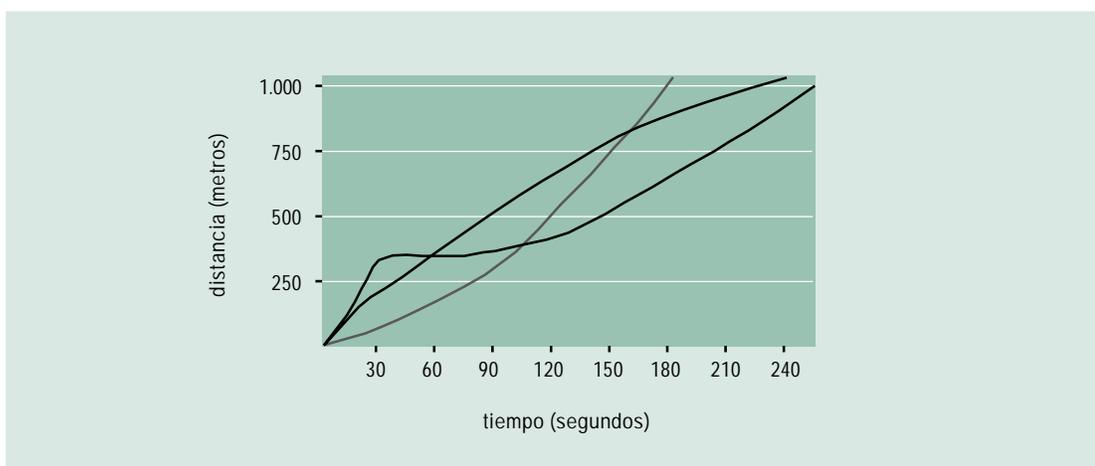
INDICACIONES AL DOCENTE:

- En este gráfico, la variable tiempo, que es continua, está en el eje x ; en cambio la variable en el eje y es discreta. Sin embargo el trazar una gráfica como si ambas fueran continuas facilita la lectura y señala las tendencias en los distintos períodos de tiempo.
- Será interesante conocer las distintas formas que los estudiantes utilicen para responder la quinta pregunta. Es posible que para algunas sea suficiente la sola observación del gráfico mientras otros necesitarán hacer el cálculo numérico: el número de bebidas por unidad de tiempo.
- La sexta pregunta se orienta a suponer conclusiones fundamentadas, a partir de la lectura del gráfico.

Ejemplo B Tres atletas participan en una carrera de 1.000 m. Un periodista deportivo transmite esta carrera desde el estudio radial; cuenta con el apoyo de una transmisión directa por televisión y con una conexión computacional que le permite ver en una pantalla los gráficos del desempeño de los tres atletas, diferenciados por color.

Por alguna razón se pierde la señal de TV y el periodista realiza su transmisión sólo con el apoyo de los gráficos del computador.

Si tú fueras el locutor, ¿cómo relatarías los momentos más interesantes de esta competencia, si la pantalla del computador presenta el gráfico siguiente?



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Podrían organizarse grupos de trabajo y que cada grupo escribiera la locución que considere adecuada. Eventualmente, esta locución podría cumplir algunas indicaciones específicas; por ejemplo,

sobre el momento de partida, los momentos en que dos corredores van a la par y el orden de llegada.

- Será interesante pedirles que expliquen en qué se fijan para saber el orden de llegada o por qué saben que en determinado momento de la carrera coinciden dos competidores.
- Una vez realizadas estas tareas, comparar con el tipo de información que podría proporcionar una tabla o varias tablas. ¿En qué circunstancia puede ser más eficiente una tabla? Considerar criterios como exactitud, cantidad de información, tendencia, entre otros.

Ejemplo C El gráfico siguiente indica las variaciones de peso de una guagua, durante los primeros treinta días de su vida. Peso al nacer: 3,500 kg.



Respondan las preguntas que siguen:

- ¿Cuál es el peso de la guagua a los 8 días?
- ¿En qué días el peso es el más bajo?
- ¿En qué días el peso ha permanecido invariable?
- ¿En qué días el peso ha bajado?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Se puede pedir que a partir de la información que da este gráfico construyan una tabla y/o un gráfico que relacione el tiempo y el peso de la guagua. La incorporación de los números negativos y su interpretación es un aspecto interesante en la lectura de los gráficos.

2. Actividades asociadas a la proporcionalidad directa

Actividad 1

Resolver problemas que involucran proporcionalidad directa por medio de tablas de valores, reducción a la unidad y/o ecuaciones.

Ejemplo Tres amigas organizan una microempresa. Deciden instalarse con una amasandería y vender, entre otros productos, pan integral. La experiencia casera les indica que un kilogramo de harina les rinde 1,250 kg de pan. Además, por cada kg de harina, necesitan 40 g de levadura y 50 g de manteca vegetal. Para cada día de la primera semana, ellas piensan hacer 30 kg de pan. ¿Cuánta harina integral, levadura y manteca necesitan para hacer el pan de la semana?

INDICACIONES AL DOCENTE:

■ A veces, los estudiantes aprenden una forma de resolver estos problema y la mecanizan sin tener claro por qué hacen determinada secuencia de cálculos, ni tampoco disponen de dispositivos de control sobre los resultados. El uso de una tabla como instrumento ordenador, como apoyo para la reflexión y el desarrollo de los cálculos, favorece el significado de la operatoria.

Pan kg	Harina kg	Levadura g	Manteca g
1,250	1	40	50
12,500	10		
25,000			
5,000			
30,000			

■ Es necesario abordar diversos problemas que consideren situaciones no proporcionales y de proporcionalidad directa. El proceso de resolución, el análisis de las relaciones entre los datos; el uso de tablas de valores como recurso para ordenar la información, para reflexionar y apoyar el razonamiento correcto; la realización de discusiones y debates; la sistematización de ensayos y la corrección de errores constituyen un buen soporte para lograr la discriminación entre este tipo de problemas y disponer de procedimientos de resolución.

Actividad 2

Resolver problemas que involucren proporcionalidad directa. Reconocer la constante de proporcionalidad, utilizar la representación gráfica y expresar la relación entre las variables.

Ejemplo A Considerando la información siguiente:

US\$ 1 = 8,5 pesos mexicanos y

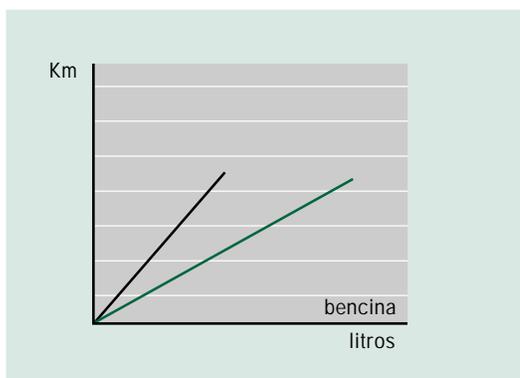
US\$ 1 = 450 pesos chilenos. Construir un gráfico cartesiano que indique la relación entre el valor de los pesos chilenos y los mexicanos.

¿Cuál es el cambio en pesos chilenos por un peso mexicano?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- La construcción de este gráfico permite a los estudiantes disponer de un buen instrumento que permite una aproximación adecuada para la conversión y comparación de precios entre ambas monedas.
- Es interesante constatar que basta con ubicar el punto (450; 8,5) y unirlo con el origen para determinar el gráfico pedido.
- Es fundamental que los estudiantes resuelvan variados problemas de proporcionalidad directa, y relacionen los valores de la tabla con la correspondiente expresión en el gráfico. Este análisis de las relaciones numéricas entre los valores de la variable puede hacerse en una planilla de cálculos.

Ejemplo B El gráfico siguiente muestra el gasto de bencina de un mismo vehículo en carretera y en ciudad:



Sin los números en los ejes, ¿cuál de los dos corresponde al rendimiento en carretera?
¿Por qué?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es interesante destacar cómo el gráfico informa aunque no incluya los números en los ejes, además de indicar una tendencia. Procurar que los estudiantes establezcan las ventajas y desventajas entre el gráfico y la tabla de valores.

Ejemplo C El cine-arte tiene un plan especial para sus socios: pagan una cuota anual de \$5.000 y el valor de la entrada es \$1.500. Los que no son socios pagan \$2.000 por entrada.

Trazar el gráfico que describe la situación. ¿En qué momento se intersectan ambas rectas?
¿A quiénes les conviene ser socios de cine-arte?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En este ejemplo, se incluye una situación que no es proporcional, su gráfico intersecta al eje y en el punto 5.000. Sin embargo, es una situación interesante para comparar pendiente, interpretar el punto de intersección de los dos gráficos y analizar una situación que es bastante común en términos de oferta en el mercado.

3. Actividades asociadas a la proporcionalidad inversa

Actividad 1

Resolver problemas que involucran proporcionalidad inversa por medio de tablas de valores, reducción a la unidad y/o ecuaciones.

Ejemplo La empresa elaboradora de alimentos para animales acostumbra a envasar su producción en bolsas de 3 kg, 5 kg, 10 kg, 15 kg y 20 kg. En esta oportunidad dispone de 15 toneladas a granel y envasarán la misma cantidad de alimento por cada tipo de bolsa. La persona responsable de esta operación hizo la siguiente tabla:

k por bolsa	3	5	10	15	20
n° de bolsas	1.000				

Completar la tabla.

¿Qué tipo de relación hay entre el número de bolsas y la cantidad de kg por bolsa?

¿Cómo se representa esa relación en un gráfico en que los kg por bolsa se ubican en el eje x y el número de bolsas en el eje y?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es necesario diferenciar el proceso vinculado a determinar si el problema que resuelven es directa o inversamente proporcional o es no proporcional. En el caso de la proporcionalidad inversa,

las razones al interior de una variable no son iguales sino que una es el valor inverso de la otra. Es importante que relacionen la proporcionalidad inversa entre dos variables, en una situación determinada, con el producto constante entre los correspondientes valores de esas variables.

Actividad 2

Resolver problemas que involucran proporcionalidad inversa. Reconocer la constante de proporcionalidad y utilizar la representación gráfica.

Ejemplo Considerar la fórmula $s = v \cdot t$ en que s es distancia, v es rapidez media y t es tiempo. Si la distancia es 600 km, ¿qué valores pueden tomar la rapidez media y el tiempo?

Construir una tabla de valores y un gráfico.

INDICACIONES AL DOCENTE:

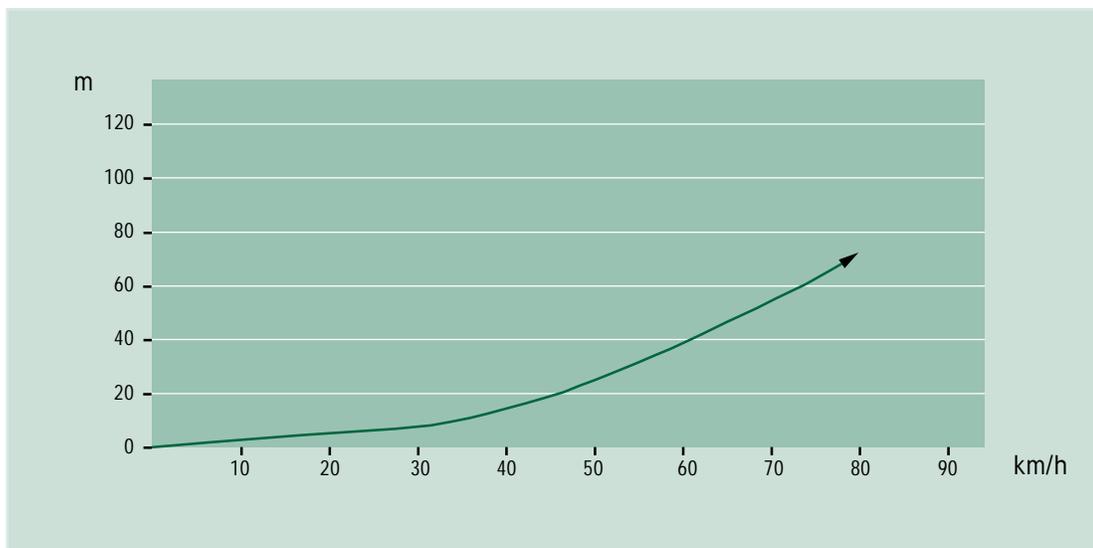
- Al hacer la representación gráfica de una situación de proporcionalidad inversa, los estudiantes suelen unir los puntos por trazos.
- En la gráfica de esta hipérbola, es interesante que las alumnas y alumnos constaten que esta curva no interseca los ejes.

Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Leer, interpretar y comunicar información sintetizada en gráficos de diversos tipos: de barra, poligonales, circulares, pictogramas variados, que se refieran a diversidad de temas. Reconocer las variables consideradas, qué representan los ejes, el significado de los cambios en los valores de las variables.

Ejemplo El gráfico muestra la distancia que requiere un vehículo para detenerse, desde el momento en que se le aplican los frenos, considerando la velocidad.



De acuerdo a esta información, ¿aproximadamente, cuántos metros son necesarios para detener un vehículo que avanza a 100 km/h?

Si el vehículo necesitó casi 40 metros para detenerse, ¿a qué velocidad se desplazaba el vehículo?

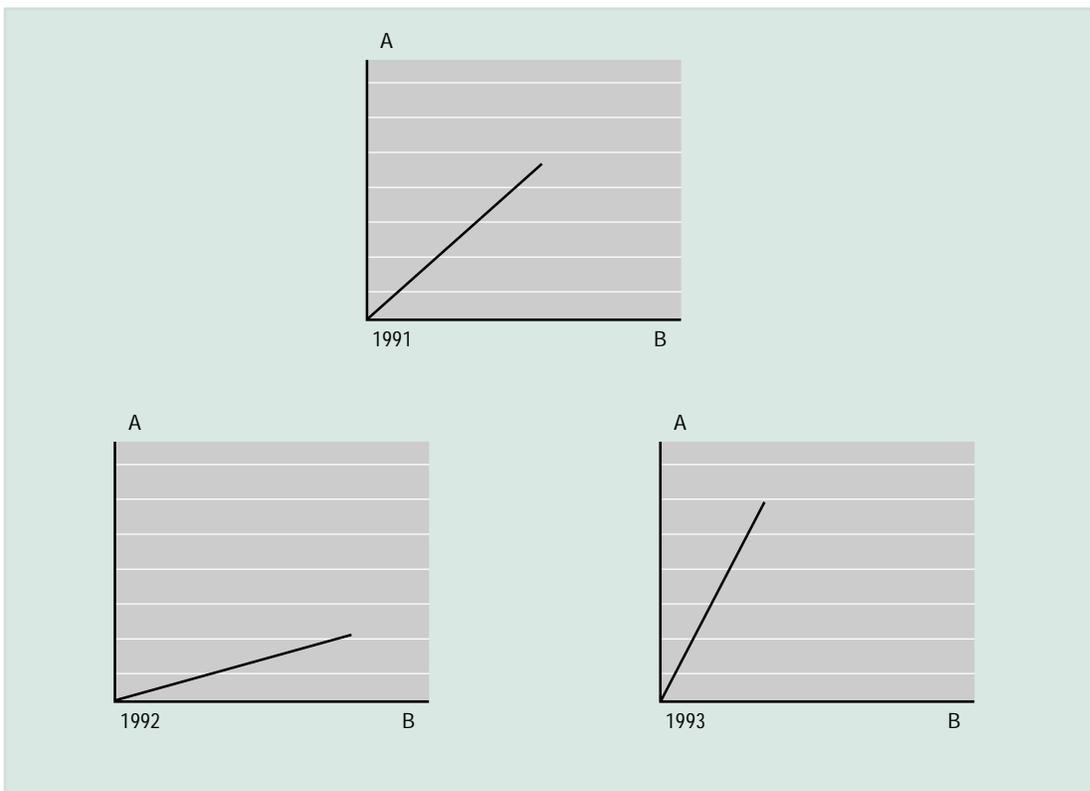
INTERESA OBSERVAR:

- i) Si identifican las variables que representa cada eje.
- ii) Si leen bien el gráfico.
- iii) Si extrapolan el valor para la velocidad de 100 km/h.

Actividad 2

Resolver problemas que involucran proporcionalidad directa. Reconocer la constante de proporcionalidad, utilizar la representación gráfica y expresar la relación entre las variables.

Ejemplo Los gráficos siguientes ilustran la relación de cambio de las monedas de los países A y B durante los años 1991, 1992, 1993.



¿Qué conclusiones puede establecer a partir de la lectura de estos tres gráficos?

Por una moneda del país B, ¿en qué año corresponde más monedas del país A?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si interpretan las diferencias entre los gráficos.
- ii) Si pueden fundamentar su respuesta a la segunda pregunta.

Actividad 3

Resolver problemas que involucran proporcionalidad inversa por medio de tablas de valores, reducción a la unidad y/o ecuaciones.

Ejemplo Se dispone de un cuadrado de 80 metros de perímetro. Señalar todos los rectángulos que tienen un área equivalente a la del cuadrado y cuyos lados son números enteros.

Este es un problema de proporcionalidad inversa. ¿Cuáles son las variables que intervienen?, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si distinguen los conceptos de área y perímetro.
- ii) Si reconocen los números enteros positivos.
- iii) Si identifican las variables involucradas en proporcionalidad inversa.



Unidad 5

Variaciones porcentuales

Orientaciones didácticas

Los porcentajes están presentes en una gran diversidad de situaciones: en el diario quehacer de una persona, sus compras, créditos, rebajas o aumentos, impuestos, leyes sociales, medicina; éxitos o fracasos se apoyan en valores porcentuales; informaciones relativas a situaciones sociales, políticas, económicas se expresan, habitualmente, en variaciones porcentuales.

Los estudiantes de Primer Año Medio tienen conocimientos sobre este tema, tanto desde el ámbito informal como desde su trabajo en los últimos años de Educación Básica. El propósito de su estudio en esta unidad es profundizar sobre el tema y aprender a expresar y calcular el tanto por ciento como operador multiplicativo, que es la forma en que se opera generalmente, en el ámbito del comercio y de las finanzas.

Además, en la medida de lo posible, será valioso para el aprendizaje que las alumnas y alumnos se familiaricen con el uso de la planilla de cálculo en cualquiera de sus versiones; la existencia de este tipo de software, y su uso cada vez más extendido marcan la necesidad de enfatizar el aprendizaje de conceptos por sobre un exceso de cálculos escritos.

Las actividades propuestas para esta unidad se ordenan en torno a tres núcleos temáticos:

1. Actividades asociadas a la resolución de problemas de porcentajes, incluyendo los casos de porcentajes menores que 1 y mayores que 100.
2. Actividades relacionadas con la resolución de problemas para reconocer el referente asociado a 100 que no está explícito.
3. Actividades relativas a la generalización del cálculo de porcentaje.

Contenidos

- Lectura e interpretación de publicidad, de información científica y de indicadores económicos y sociales que involucren porcentaje.
- Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones.
- Resolución de problemas en los que el referente asociado a 100 no está explícito.
- Porcentaje promedio.
- Resolución de problemas en los que se plantean porcentajes sucesivos.
- Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto multiplicativo del porcentaje. Análisis de la pertinencia de las soluciones.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Resuelven problemas que involucren cálculo de porcentajes; estos problemas incluyen porcentajes menores que 1 y mayores que 100.
2. Describen y comparan diversos procedimientos para representar y resolver problemas de porcentaje; relacionan decimales, fracciones y porcentajes.
3. Estiman resultados en la resolución de cálculos y de problemas de porcentajes.
4. Reconocen el porcentaje como un caso de proporcionalidad directa.
5. Resuelven problemas en los que el referente asociado a 100 no está explícito.
6. Expresan el porcentaje como operador multiplicativo.
7. Utilizan calculadora y planilla de cálculo para registrar y calcular porcentajes.

Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

1. Actividades asociadas a la resolución de problemas de porcentaje incluyendo los casos de porcentajes menores que 1 y mayores que 100

Actividad 1

Recoger información sobre el uso de los porcentajes en la vida diaria y resolver problemas a partir de esa información. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones; constatar la equivalencia de diversos procedimientos; utilizar el cálculo mental y el cálculo aproximado. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo.

Ejemplo A Los estudiantes leen y recortan informaciones de prensa que contengan %, sobre temas que les interesen. Entrevistan a familiares o adultos que tengan trabajo remunerado, en relación con los descuentos en los sueldos por aplicación de las leyes sociales. Se informan sobre los descuentos por características estacionales o por aumento de oferta: precios de determinadas frutas y verduras, liquidaciones de temporada, rebajas en pasajes, etc. Utilizando esas informaciones proponer problemas en que esté explícito el referente asociado a 100.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Que los alumnos se den cuenta de que el cálculo de porcentajes invade la vida diaria, las páginas de los diarios y otros medios de comunicación; también en el cumplimiento de leyes sociales y otros. A veces aparece más visible en las informaciones de tipo financiero en las que la interpretación requiere otros conocimientos específicos del área.
- En la información que se pueda recoger importa la profundidad y el nivel de precisión que se puede lograr en relación con determinado tema.

Ejemplo B Calcular cuál es el precio oferta de los pijamas, si el precio sin rebaja es \$5.670.

AHORRE
20%
Selección de
pijamas y batas
para dama

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En relación con este ejemplo se pueden plantear, por lo menos, las siguientes maneras correctas de hacer los cálculos:

$$0,8 \cdot 5.670$$

$$5.670 - 0,2 \cdot 5.670$$

$$5.670 : 5 \cdot 4$$

$$5.670 - 5.670 : 5$$

$$5.670 - 5.670 \cdot 0,1 \cdot 2$$

- Es importante incentivar el cálculo aproximado, el uso de las fracciones y/o de los números decimales para la resolución de problemas de porcentaje.

Ejemplo C Si el valor de una cuota por un pago mensual en una cooperativa es \$27.555 y se reajusta mensualmente según el precio del IPC, ¿cuál es el precio para la cuota de mayo, si el IPC del mes de abril fue igual 0,6%?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es necesario conversar e informar sobre IPC, su sentido e incidencia en numerosas situaciones.
- En relación con los cálculos, será interesante impulsar el uso de la calculadora y preocuparse de la correcta interpretación de los resultados.
- Es probable que algunos estudiantes se equivoquen y calculen el 6% y no el 0,6%. Ante este error, que es bastante común, es interesante conducir la reflexión hacia el cálculo del 1%; el resultado del 1% debiera ser mayor que el que corresponde al 0,6%.
- Una tabla de valores permite ordenar y procesar en forma razonada la información.

cuota abril	100,0	27.555
incremento	0,6	
cuota mayo	100,6	

- Otro apoyo para este cálculo es el ordenamiento de los datos en una ecuación para determinar el factor de conversión de las cuotas: $27.555 \cdot 1,006$ es el valor de la nueva cuota.
- En el mundo del comercio y en el ámbito financiero, suele ser habitual establecer el factor de conversión y en seguida operar con éste.

2. Actividades relacionadas con la resolución de problemas para reconocer el referente asociado a 100 que no está explícito

Actividad 1

Resolver problemas de cálculo de porcentaje en los que el referente asociado a 100 no está explícito. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo. Calcular porcentajes sucesivos y porcentajes promedios.

Ejemplo A Considerando la siguiente planilla de sueldo, determinar el sueldo imponible.

R&S Cia Ltda.
Fono-Fax 000000

Liquidación de sueldos

Fecha _____

Nombre _____

Sueldo imponible _____

AFP (12,5%) _____

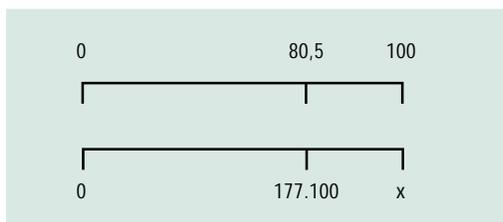
Fonasa (7%) _____

Total descuentos _____

Sueldo líquido _____ \$ 177.100

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Al resolver este problema, la tendencia de muchas alumnas y alumnos es asociar el sueldo líquido con 100.
- Para algunos estudiantes puede ser de gran utilidad la visualización de la información en trazos como los del dibujo, que tienen distinta gradación y que permiten visualizar la relación entre los datos.



- Otro recurso es la tabla de valores; su construcción y uso puede contribuir al razonamiento correcto y a ordenar la realización de los cálculos:

imponible	100,0	
descuento	19,5	
líquido	80,5	177.100

- Si el propósito es determinar el factor de conversión, es conveniente recurrir al ordenamiento de la información en una ecuación:

$$x - 0,195x = 177.100.$$

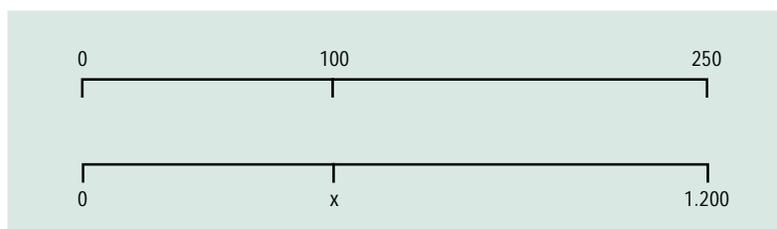
Al resolverla se obtiene $177.100 : 0,805$

- Es muy importante que las alumnas y alumnos utilicen una ecuación para calcular el factor de conversión y discernir si lo que corresponde para la resolución del problema en cuestión es multiplicar o dividir por dicho factor.

Ejemplo B La superficie sembrada en la provincia se incrementó, en este año, en un 150% en relación al año anterior. Si actualmente la superficie es 1.200 ha, ¿cuál era la superficie sembrada el año anterior?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es fundamental que los estudiantes relacionen el cálculo de porcentaje con las fracciones. En este ejemplo se incrementa en $3/2$ y el total corresponde a $5/2$.
- La representación gráfica puede contribuir a una buena interpretación:



- Es necesario que los estudiantes distingan la expresión 'aumentó o disminuyó en un a%' de 'aumentó o disminuyó a un a%'.

Ejemplo C Si los precios suben y bajan sucesivamente un 10% ¿cuál es la variación de precios entre la situación inicial y la final?

Y, si bajan y suben sucesivamente un 10%, ¿es el mismo resultado anterior?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Las alumnas y alumnos tienden a no hacer cálculos y responden que no hay variación alguna.
- Es necesario proponer diversos problemas de este tipo, utilizar diversas representaciones -tablas de valores o ecuaciones- para lograr que visualicen el cambio de referente.
- Algunos estudiantes necesitan un supuesto numérico que se asocia a 100; otros pueden reflexionar utilizando 100 como referente inicial.

Ejemplo D De acuerdo a la información del Instituto Nacional de Estadística (INE), en el año 1994 la población chilena de 20 a 64 años de edad y la fuerza de trabajo eran los siguientes:

	Población	Fuerza de trabajo	%
Mujeres	3.774.000	1.547.340	
Hombres	3.601.000	3.240.900	

¿Cuál es el porcentaje promedio que alcanzó la fuerza de trabajo durante ese año?

INDICACIONES AL DOCENTE:

- La tendencia de muchas alumnas y alumnos es calcular los porcentajes para cada caso; con esos resultados calculan el promedio: los suman y dividen por dos. Es importante que reflexionen sobre el significado de esa operatoria y comparen con los valores que corresponden a los totales. ¿En qué casos se podría calcular el promedio de los porcentajes y éste coincide con el porcentaje promedio?

3. Actividades relativas a la generalización del cálculo de porcentaje

Actividad

Utilizar el lenguaje algebraico en el cálculo de porcentaje.

Ejemplo A Verificar que $a\%$ de b es lo mismo que el $b\%$ de a . Utilizan esta igualdad para facilitar algunos cálculos, tales como el 16% de 25, 17,3% de 50, etc.

Ejemplo B Constar que el $a\%$ del $b\%$ de c es igual al producto $abc \cdot 10^{-4}$

INDICACIONES AL DOCENTE: Es muy importante que los estudiantes se percaten que el trabajo con el lenguaje algebraico tiene una enorme potencialidad.

Para el cálculo de los operadores, es interesante que utilicen la expresión $C + a\% C$ en que C es el referente asociado a 100 sobre el que se aplica un porcentaje a .

Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Recoger información sobre el uso de los porcentajes en la vida diaria y resolver problemas a partir de esa información. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones; constatar la equivalencia de diversos procedimientos; utilizar el cálculo mental y el cálculo aproximado. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo.

Ejemplo La tabla siguiente resume la asistencia a clases en cinco cursos, el primer lunes de abril, en un Instituto de Idiomas.

Idiomas	Total de alumnos	Asistentes	% ausentes
Inglés	120	114	
Francés	40	36	
Alemán	65	52	
Portugués	35	21	
Japonés	58	29	

¿Cuál es el porcentaje promedio de asistencia a este Instituto?

INTERESA OBSERVAR:

- Si calculan bien los porcentajes de ausencia.
- Si suman y promedian esos porcentajes.
- Si suman los totales de alumnos y de asistentes y calculan el porcentaje.

Actividad 2

Resolver problemas de cálculo de porcentaje en los que el referente asociado a 100 no está explícito. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo. Calcular porcentajes sucesivos y porcentajes promedios.

Ejemplo ¿A qué descuento único son equivalentes dos descuentos sucesivos del 10% y del 20%?
¿Es equivalente si se invierte el orden, primero el de 20% y después el de 10%? ¿Por qué?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si hacen cálculos tomando un referente cualquiera o considerando 100.
- ii) Si en cada caso plantean los cálculos o bien multiplican por 0,1 y por 0,2 sucesivamente.
- iii) Si multiplican por 0,9 y 0,8.
- iv) Si contestan sin necesidad de hacer los cálculos fundamentando en lo multiplicativo.
- v) Si contestan sin hacer cálculos fundamentando en lo aditivo.

Actividad 3

Las publicaciones especializadas en deporte, incluyen en las tablas de posiciones de los equipos de fútbol una columna de rendimiento expresada en porcentaje.

La siguiente es una parte de una tabla:

Puesto	Equipo	PTS	PJ	PG	PE	PP	GF	GC	DIF	REND
1°	A	10	4	3	1	0	8	3	5	83,3%
2°	B	9	3	3	0	0	11	2	9	100%
3°	C	9	3	3	0	0	8	1	7	100%
4°	D	6	4	2	0	2	10	7	3	50%

¿Qué significa este porcentaje de rendimiento?

¿Cómo se explica que el segundo y tercer lugar tengan un rendimiento más alto que el del primer lugar?

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si comprenden la nomenclatura de estas tablas; puede que sea necesario que alguien con conocimientos de fútbol explique los significados.
- ii) Si logran definir qué es el porcentaje de rendimiento que se calcula sobre el total de puntos posibles según el número de partidos jugados.

Actividad 4

Utilizar el lenguaje algebraico en el cálculo de porcentaje.

Ejemplo Este ejemplo se puede desarrollar en grupo.

Una distribuidora de guantes para el trabajo en la industria metalúrgica tiene la siguiente oferta:

- por compras sobre 200 pares, 0,5% de descuento;
- sobre 500 pares, 1% de descuento;
- sobre 1.000 pares 10% de descuento;
- por pago al contado 7,5% de descuento.

Si una empresa necesita comprar 900 pares de guantes, ¿cuál oferta es más conveniente?
¿por qué?

INTERESA OBSERVAR:

- i) La comprensión que tienen del problema.
- ii) El tipo de cálculo que realizan:
 - si suponen un valor para los guantes
 - si los guantes valen \$a
 - si hacen los cálculos de descuento y restan
 - si determinan el operador multiplicativo



Unidad 6

Factores y productos

Orientaciones didácticas

Nuestras alumnas y alumnos ya han aprendido sobre las expresiones algebraicas, su poder de generalización, su diversidad de significados en contextos de aritmética, de geometría y de lo cotidiano y, también, algunos aspectos referidos a la convención de escritura.

Esta unidad focaliza la atención en el aprendizaje del cálculo de productos y factores. Se orienta al desarrollo de la capacidad de generalización apoyada en una sistematización del lenguaje algebraico.

Este tema es de gran tradición en nuestras salas de clase; quienes han cursado la enseñanza media tienen el recuerdo del cálculo de los productos notables. Aquí se propone la enseñanza de este mismo tema considerando como conocimientos previos la operatoria aritmética y el cálculo de áreas de rectángulos. En esta perspectiva se hace hincapié en el carácter generalizador aportado por el álgebra.

Es necesario, sobre todo para facilitar los aprendizajes posteriores, que nuestros estudiantes tengan un dominio sobre la operatoria algebraica; que reconozcan los productos notables y sus factorizaciones, que la aritmética y la geometría les den significado a estos procedimientos: que éstos no se transformen en meros artilugios sino que los estudiantes puedan utilizarlos para la resolución de problemas, para la demostración de propiedades, para pensar.

Las actividades que se proponen en esta unidad están organizadas en torno a tres núcleos temáticos:

1. Actividades asociadas al manejo fluido de la operatoria algebraica básica.
2. Actividades relativas a la resolución de problemas y demostraciones que involucran operatoria algebraica.
3. Actividades acerca de la evolución del lenguaje algebraico.

Contenidos

- Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables. Interpretación geométrica de los productos notables.
- Comentario histórico sobre la evolución del lenguaje algebraico.
- Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Transforman expresiones algebraicas por cálculo de productos, factorizaciones, reducción de términos semejantes y eliminación de paréntesis.
2. Calculan productos notables; los factorizan; los interpretan numérica y geoméricamente.
3. Resuelven problemas que involucren productos y/o factorizaciones.
4. Analizan las fórmulas e interpretan las variaciones que se producen en perímetros, áreas o volúmenes, por cambios en las medidas lineales de las figuras.
5. Conocen algunos antecedentes históricos sobre la evolución del lenguaje algebraico.

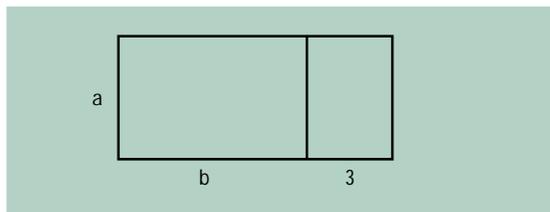
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

1. Actividades asociadas al manejo fluido de la operatoria algebraica básica

Actividad 1

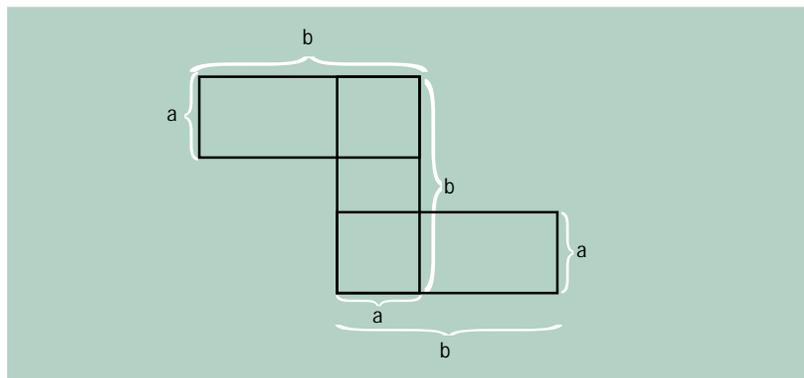
Calcular productos entre polinomios cualesquiera, determinar factores, eliminar paréntesis y reducir términos semejantes. Ejercitar el cálculo de productos y de factorizaciones.

Ejemplo A Calcular el área de un rectángulo si un lado mide a cm y el otro mide $b + 3$ cm.



Calcular la medida de los lados de un rectángulo si su área es $(a^2 + ab)$ cm^2 .

Calcular el área de una figura como la siguiente, formada por la superposición de tres rectángulos, si los tres rectángulos tienen las mismas medidas a y b .



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Por medio de este tipo de actividad, se busca establecer relaciones entre el cálculo de productos y factores en álgebra con el cálculo de medidas en figuras geométricas y con cálculos aritméticos.
- Si es necesario, las alumnas y alumnos podrán dar valores numéricos a las letras que se utilicen, para constatar cómo éstas pueden representar una diversidad de valores. En el último ejemplo, hay algunas restricciones a estos valores: el largo debe ser mayor que el doble del ancho.
- En general, la valoración de expresiones puede ser una manera que permita identificar la escritura del producto y además puede ser utilizada para apoyar el desarrollo de habilidades de cálculo mental y de aproximaciones.

Ejemplo B Comparar un cálculo del producto de dos números con el cálculo de su expresión algebraica. En este caso, 234×56 con $(100a + 10b + c) \cdot (10d + e)$.

$$\begin{array}{r} \underline{234} \cdot 56 \\ 1.404 \\ \underline{1.170} \\ 13.104 \end{array}$$

¿Qué valores deben asumir a, b, c, d, e , para que la multiplicación algebraica corresponda a la numérica?

Identificar las líneas del cálculo numérico con las correspondientes expresiones algebraicas.

INDICACIONES AL DOCENTE:

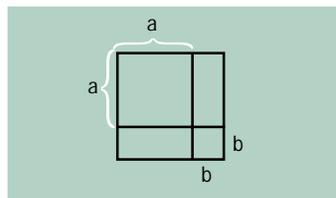
■ Es fundamental que los estudiantes relacionen la multiplicación de monomios, binomios y trinomios con la forma en que se hace el cálculo por escrito del producto de dos números; que se den cuenta de que se trata de lo mismo con diferente nivel de generalidad.

Actividad 2

Reconocer los productos notables, calcular y expresar esos productos como factores.

Ejemplo A Calcular el área de un cuadrado si sus lados miden $a + 5$ cm.

Ejemplo B Calcular áreas de cuadrados en los que la medida de los lados se expresa como suma de dos números cualesquiera.



Recortar los cuadrados y rectángulos interiores, como puzzle; armar y desarmar el cuadrado de lado $a + b$.

INDICACIONES AL DOCENTE:

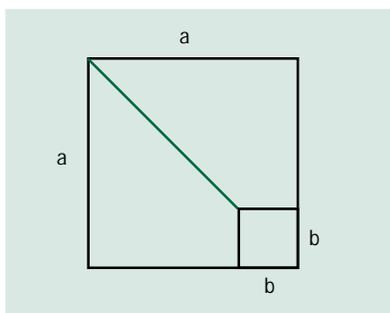
■ El aprendizaje del cálculo del cuadrado del binomio con apoyo en la representación del área del cuadrado contribuye a distinguir $(a + b)^2$ de $(a^2 + b^2)$

- Es interesante que los estudiantes evalúen expresiones de la forma $a^2 + 2ab + b^2$, para diversos valores de a y b ; que constaten que siempre son cuadrados perfectos.
- Que calculen la medida de los lados de cuadrados cuya área sea igual a un trinomio cuadrado perfecto y también incluir aquellos que no sean cuadrados perfectos. Esto permite establecer relaciones con las raíces cuadradas y los números irracionales.
- Después de armar y desarmar estos puzzles, de hacer variados ejercicios, llegar a la generalización del cálculo del cuadrado del binomio.

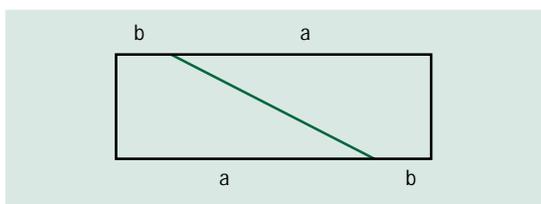
Ejemplo C Para apoyar la generalización del cálculo de la suma por diferencia se puede proponer un puzzle como el siguiente.

La figura que sigue está formada por un cuadrado de lado a al que se le ha quitado un cuadrado más pequeño de lado b .

Si se corta por la línea punteada que une los vértices superiores izquierdos de ambos cuadrados, se obtienen dos piezas de puzzle.



Armar con esas piezas el rectángulo que sigue.



Calcular el área de ambas figuras y expresarla, en cada caso, en la forma que les parezca más adecuada para cada una.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este puzzle puede ayudar a que las alumnas y alumnos representen desde lo geométrico el significado de la diferencia de dos cuadrados.
- Para apoyar se representación aritmética se puede plantear cálculo mental considerando números que permitan el uso de la suma por diferencia ($52 \cdot 48$, por ejemplo).

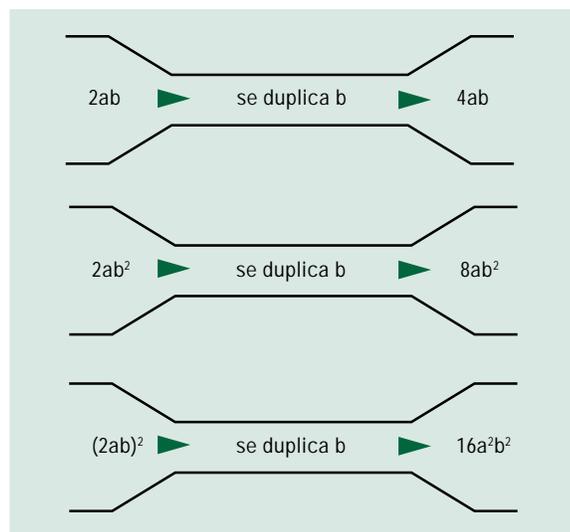
1. Actividades relativas a la resolución de problemas y demostraciones que involucran operatoria algebraica

Actividad

Resolver problemas de diversos ámbitos, principalmente geométrico, que involucran operatoria algebraica. Analizar fórmulas de volúmenes, áreas y perímetros y los cambios que se generan por variaciones en las medidas lineales de las figuras. Plantear demostraciones sencillas.

Ejemplo A Si se duplica la arista de un cubo. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Ejemplo B Considerar expresiones como $2ab$, $2ab^2$ y $(2ab)^2$. Analizar las variaciones que provoca un cambio en a o en b , desde la perspectiva algebraica. Este análisis se puede apoyar en un dibujo como el que sigue:



Desde una mirada geométrica, puede considerarse ab como el área de un rectángulo de lados a y b ; la expresión ab^2 se puede asociar con el volumen de un prisma de base cuadrada. Imaginar las figuras iniciales y aquellas en las que se ha duplicado el valor de b .

Establecer las relaciones entre lo algebraico y lo geométrico. Dibujar las figuras si se considera necesario.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Para que los estudiantes lleguen a discriminar las variaciones en una fórmula, si la variable está a la primera, segunda o tercera potencia es un desafío que está muy ligado a la sintaxis del lenguaje algebraico: al significado del uso de los paréntesis, a la diferencia entre aditivo y multiplicativo.

Ejemplo C Demostrar que la suma de tres potencias consecutivas de 2, es siempre divisible por 7.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es altamente probable que muchos estudiantes, antes de abordar este problema en forma general, constaten primero para algunos casos concretos. Es necesario observar si tienen dificultad para anotar una potencia de 2 y su consecutiva.
- Es importante que las alumnas y alumnos logren diferenciar una demostración de una constatación, aunque ésta la puedan realizar para muchos casos particulares.
- Este ejemplo se puede complementar con preguntas como las siguientes:
¿Por cuánto es divisible la suma de dos potencias consecutivas de 2?
¿Por cuánto es divisible la suma de dos potencias sucesivas de 5? ¿Y si son potencias de 10?

Ejemplo D Demostrar que el cuadrado de un número impar es también impar.

Ejemplo E Demostrar que la diferencia entre dos cuadrados consecutivos es siempre impar.

Ejemplo F Demostrar que el cuadrado de un número impar, menos 1, es siempre múltiplo de 8.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- En forma similar al ejemplo anterior, muchos estudiantes tienen dificultades para llegar a expresar formas generales para categorías de números.
- Como en cualquier resolución de problemas siempre es interesante observar qué estrategias utilizan los estudiantes para abordarlo y resolverlo, cuál es la interacción que se da en los grupos de trabajo, etc.

Ejemplo G Visualizar las siguientes regularidades:

$$31 \cdot 39 < 32 \cdot 38 < 33 \cdot 37 < 34 \cdot 36 < 35^2$$

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este ejemplo se puede constatar con calculadora. Se puede complementar planteando si es una regularidad presente para todos los números de dos cifras. ¿Cómo se podría demostrar? ¿Hay alguna regularidad en las diferencias que determina la desigualdad? ¿Por qué?

3. Actividades acerca de la evolución del lenguaje algebraico

Actividad

Recoger información sobre la incorporación de las letras al lenguaje algebraico y algunos antecedentes de los cambios que se han producido a lo largo del tiempo.

Ejemplo A Hacer un listado de fórmulas de áreas, perímetros, volúmenes. Imaginar que no se usan las letras para representar números y buscar formas de recordar las fórmulas sin ese tipo de notación.

Ejemplo B Recoger información sobre la historia de la matemática y el uso de las letras.

Ejemplo C Conversar con científicos, con profesores de química, biología o física y realizar breves encuestas acerca del papel del lenguaje algebraico en su disciplina.

Ejemplo D Inventar expresiones algebraicas con paréntesis y resolverlas.

$$3a - (2b + a) = 2(a - b)$$

Escribirlas sin paréntesis y evaluar las diferencias.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Que los estudiantes se den cuenta que la escritura algebraica tiene historia. Ellos podrían averiguar en relación con otros lenguajes, como la escritura de la música, y visualizar los cambios experimentados con el paso del tiempo y la presencia de problemas que es necesario resolver.

Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Calcular productos entre polinomios cualesquiera, determinar factores, eliminar paréntesis y reducir términos semejantes. Ejercitar el cálculo de productos y de factorizaciones

Ejemplo Calcular el valor de:

a) $(2 + 4 + 6 + 8 + 10) / (3 + 6 + 9 + 12 + 15)$;

b) $(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 200) / (3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 300)$

INTERESA OBSERVAR:

- i) Si hacen los cálculos numéricos.
- ii) Si se percatan de que estas sumas se pueden factorizar.
- iii) Si usan la factorización como una estrategia de trabajo.

Actividad 2

Resolver problemas de diversos ámbitos, principalmente geométrico, que involucran operatoria algebraica. Analizar fórmulas de volúmenes, áreas y perímetros y los cambios que se generan por variaciones en las medidas lineales de las figuras. Plantear demostraciones sencillas.

Ejemplo A Si se duplica el radio de un círculo, ¿en cuánto aumenta su perímetro?, ¿en cuánto aumenta su área? Fundamente su respuesta.

INTERESA OBSERVAR

- i) Si comprenden el problema, si hacen algún dibujo o esquema.
- ii) Si le asignan algún valor numérico al radio y calculan con ese valor.
- iii) Si trabajan directamente con la fórmula.

Ejemplo B Demostrar que la diferencia entre dos cuadrados sucesivos es siempre impar.

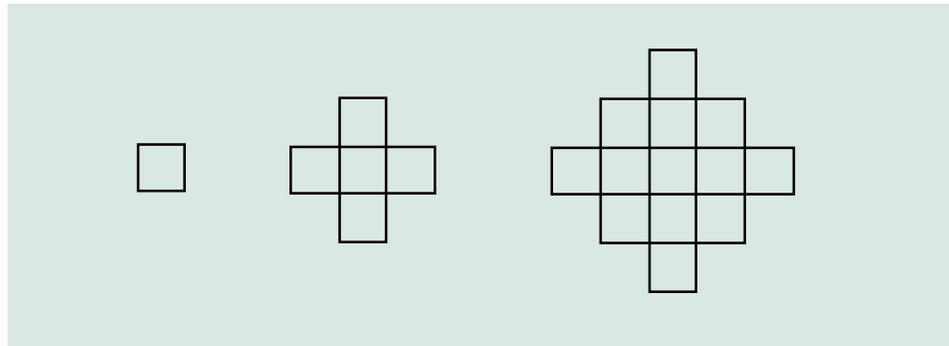
INTERESA OBSERVAR:

- i) Si comprenden el significado de dos cuadrados sucesivos.
- ii) Si consideran diversos ejemplos numéricos para responder.
- iii) Si pueden expresarlo como diferencia en lenguaje algebraico y hacer las reducciones correspondientes.

Ejemplo C Observar la siguiente secuencia de figuras. Describir cómo se forma una a partir de la anterior.

Establecer cuántos cuadrados son necesarios para formar la décima figura.

¿Cuántos cuadrados se necesitan para la *n*ésima figura?



INTERESA OBSERVAR:

- i) Si logran descubrir algún patrón de formación.
- ii) Si necesitan hacer las figuras hasta la décima para responder la pregunta.
- iii) Si logran expresar la forma general.



Unidad 7

Congruencia de figuras planas

Orientaciones didácticas

Generalmente el aprendizaje de la geometría se valora como iniciación al pensamiento formal; a este argumento es necesario agregar que también es importante como una fuente de intuiciones; permite aproximaciones a través de pruebas no formales, no axiomatizadas, como dibujos y plegados de papel.

Esta última perspectiva es la que interesa explotar en este programa; que los estudiantes puedan argumentar y fundamentar sus conclusiones en hechos y/o cadenas de afirmaciones coherentes. Las demostraciones no formales no deberían ser consideradas como errores o deficiencias, sino como una etapa inicial de un proceso hacia las demostraciones más formales.

La congruencia de triángulos es un tema con historia en nuestra Educación Media; en este programa, la congruencia de triángulos se relaciona especialmente con dos temas: las transformaciones isométricas y la construcción de triángulos.

Construir un triángulo u otra figura geométrica, a partir de sus elementos primarios, discernir sobre cuáles son necesarios y suficientes para determinar un solo tipo de triángulo, son reflexiones importantes para que los criterios de congruencia tengan sentido.

Los criterios de congruencia de triángulos, los ejes y centros de simetría de las figuras pasan a ser instrumentos que facilitan el análisis de figuras geométricas; su utilización permite visualizar regularidades y analizar bajo qué condiciones se da tal o cual regularidad.

En este contexto, las actividades de la unidad se organizan en torno a cuatro núcleos temáticos:

1. Actividades acerca de los elementos que definen una figura geométrica.
2. Actividades asociadas a la resolución de puzzles con figuras geométricas.
3. Actividades asociadas a la resolución de problemas que involucren congruencia.
4. Actividades relativas a los aportes de Euclides al desarrollo del pensamiento geométrico.

Contenidos

- Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.
- Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.
- Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia.
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.
- Aporte de Euclides al desarrollo de la geometría.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Analizan los datos necesarios y suficientes para construir un triángulo y lo relacionan con los criterios de congruencia de triángulos.
2. Componen y descomponen figuras (puzzles geométricos); analizan congruencia entre sus lados y ángulos.
3. Resuelven problemas que involucran congruencia de trazos, ángulos y triángulos.
4. Conjeturan y demuestran propiedades en triángulos, cuadriláteros y circunferencia por medio de congruencia de triángulos.
5. Caracterizan y clasifican triángulos y cuadriláteros a partir de sus ejes y centros de simetría.
6. Conocen algunos antecedentes acerca del aporte de Euclides a la geometría.

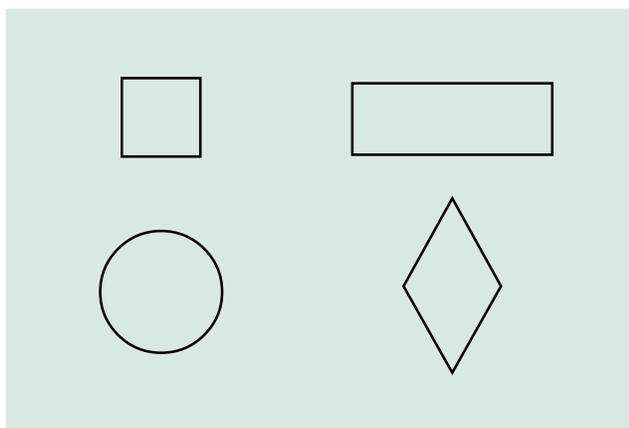
Actividades propuestas para el aprendizaje y ejemplos

1. Actividades acerca de los elementos que definen una figura geométrica

Actividad

Analizar distintas figuras geométricas para encontrar las condiciones necesarias y suficientes que las determinan. Relacionar esas condiciones con criterios de congruencia. Establecer los criterios de congruencia para los triángulos.

Ejemplo A Considerar alguna(s) de las siguientes figuras geométricas:



Suponer que se necesita comunicar a otro, por teléfono, las formas y dimensiones de estas figuras para que las dibuje. ¿Cuáles datos daría? Reducir el número de datos al mínimo posible. Registrar la información que daría por teléfono.

Al término de la actividad abrir un debate acerca de la información mínima necesaria para hacer el dibujo que se pide.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Se puede organizar el curso en grupos; cada grupo dará y recibirá información de otro grupo. En el dibujo se puede incluir una circunferencia o un cuadrado junto con otra figura que presente mayor complejidad.
- En este trabajo será interesante incorporar al debate preguntas sobre las diagonales de los cuadriláteros. ¿Queda determinado un rombo por las medidas de sus dos diagonales? ¿Es necesaria y suficiente la medida de una diagonal para determinar un rectángulo?

Ejemplo B Este ejemplo es similar al anterior, restringido a un triángulo escaleno.

Cada grupo debe encontrar al menos dos formas de realizar esta comunicación.

Al término de la actividad se abre un debate para establecer las conclusiones sobre las condiciones para la construcción de triángulos y formular los criterios de congruencia de triángulos.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Probablemente todos los grupos señalarán la alternativa de dar las medidas de los tres lados. Al respecto es necesario establecer que las medidas de los tres lados permiten construir triángulos siempre que se satisfaga la desigualdad triangular.
- Es interesante que los alumnos reflexionen, a lo menos los aspectos siguientes:
 - i) si la información incluye dos lados y un ángulo, éste debe ser el comprendido entre ambos lados; en caso contrario pueden existir dos soluciones.
 - ii) siempre que se conoce la medida de dos ángulos de un triángulo, se conoce la medida del tercero.
- Es fundamental que los estudiantes relacionen la construcción de triángulos con los criterios de congruencia.
- Se puede extender esta actividad al análisis de las condiciones de congruencia de triángulos equiláteros, rectángulos isósceles, etc.

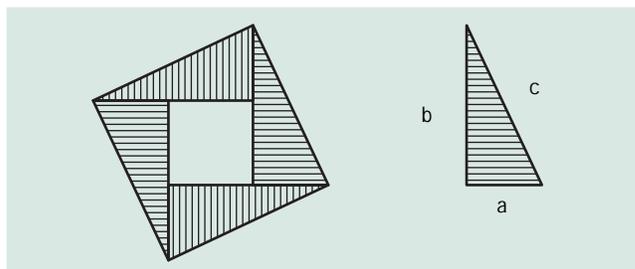
2. Actividades asociadas a la resolución de puzzles con figuras geométricas

Actividad

Armar y desarmar puzzles que involucren congruencia de trazos, de ángulos, de triángulos, de figuras en general.

Ejemplo A Este puzzle permite mostrar el Teorema de Pitágoras.

Recortar cuatro triángulos rectángulos congruentes entre sí en los que c es la hipotenusa, a el cateto menor y b el cateto mayor. Armar con estos triángulos un cuadrado de lado igual a c de modo que queda un cuadrilátero en su interior.

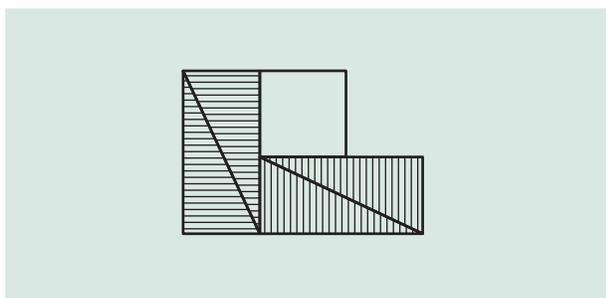


¿Qué argumentos permiten asegurar que se han formado dos cuadrados? ¿Cuánto mide el lado de cada uno de ellos?

Recortar un cuadrado congruente con el cuadrado interior.

¿Cuál es el área del cuadrado que se logra formar con estas cinco piezas: los cuatro rectángulos y el cuadrado recortado?

Con estas mismas cinco piezas armar la siguiente figura:



¿Cuál es el área de esta figura expresada en función de b y a ?

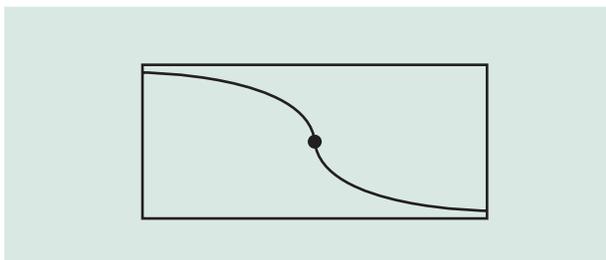
INDICACIONES AL DOCENTE:

- La realización de este puzzle permite precisar los conceptos de equivalencia de áreas y congruencia de figuras.
- La obtención de $c^2 = a^2 + b^2$ puede hacerse a través de procedimientos geométricos o algebraicos.

Ejemplo B Cortar una hoja rectangular en dos mitades congruentes. Encontrar a lo menos diez formas diferentes de hacerlo.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Las respuestas habituales son cortar por las medianas y por las diagonales. Que los estudiantes intenten otras formas. Cualquier simetría central con centro en el punto de intersección de las diagonales, como la que indica el dibujo, es solución para el problema planteado.

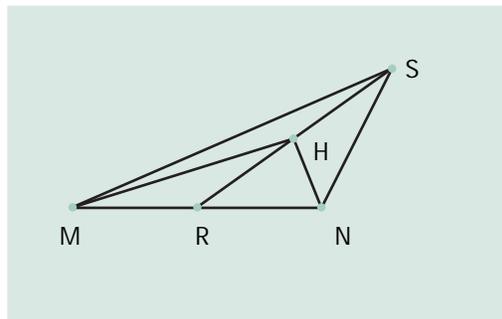


3. Actividades asociadas a la resolución de problemas que involucren congruencia

Actividad 1

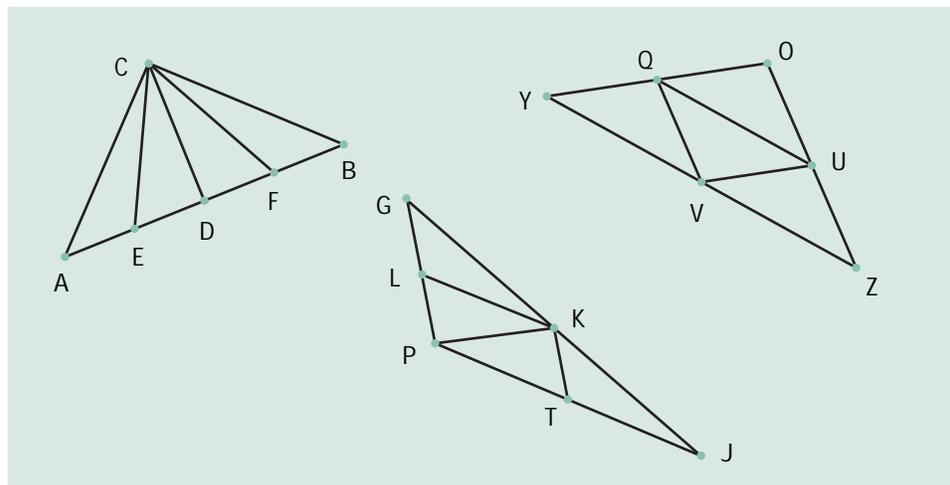
Resolver problemas que involucren congruencia de figuras (cuadriláteros, triángulos y circunferencia).

Ejemplo A El dibujo que sigue es un triángulo cualquiera dividido en cuatro triángulos.



¿Qué condiciones debe satisfacer el triángulo y su división interna para que los triángulos resultantes sean congruentes entre sí? ¿Cuáles son las condiciones para que estos triángulos sean equivalentes entre sí?

En forma similar, se puede hacer este tipo de análisis para los triángulos siguientes:



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Este ejemplo permite discutir con los alumnos y alumnas la diferencia entre triángulos equivalentes y triángulos congruentes. Es muy interesante analizar las condiciones para la congruencia; si se dispone de un software que permita variar la forma de los triángulos se puede potenciar la calidad de este análisis.

Ejemplo B Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera. ¿Qué condiciones debe cumplir para obtener triángulos congruentes al trazar las diagonales?

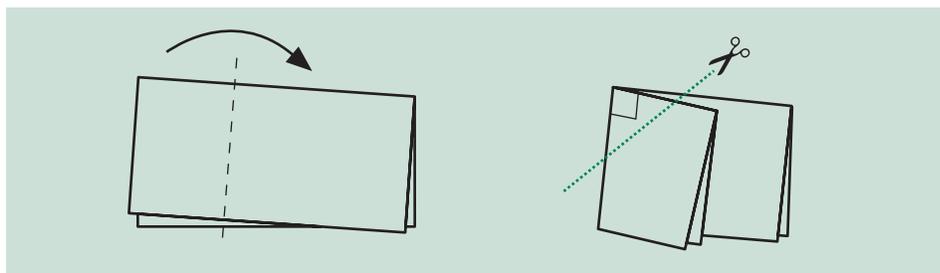
INDICACIONES AL DOCENTE:

- Distinguir cuadriláteros cóncavos y convexos. Es posible que los estudiantes consideren sólo estos últimos.
- El análisis de las propiedades de las diagonales de los cuadriláteros permite visualizar regularidades que a veces no quedan tan explícitas desde las relaciones entre ángulos o lados.

Actividad 2

Demostrar propiedades de cuadriláteros, triángulos o circunferencias utilizando los criterios de congruencia, los ejes o los centros de simetría.

Ejemplo A Doblar una hoja de papel de forma irregular, dos veces, de modo de generar un ángulo recto como lo indica el dibujo.



Cualquier corte que pase por ambos dobleces genera un rombo al extender el papel. ¿Por qué?

INDICACIONES AL DOCENTE:

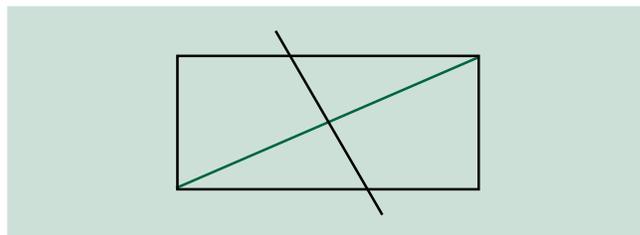
- Si los estudiantes visualizan la presencia de cuatro triángulos congruentes, por la forma en que se ha doblado el papel, indica que tienen una adecuada representación del rombo.
- El doblado y corte de papel es una herramienta de trabajo que puede complementar y apoyar el aprendizaje de geometría, el análisis de propiedades y la resolución de problemas.

Ejemplo B Categorizar diversos tipos de cuadriláteros considerando la cantidad de ejes de simetría que es posible trazar en cada uno. Desde esta perspectiva, comparar, al menos el cuadrado, el rombo y el rectángulo.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Sería interesante que llegaran a construir categorías incluyentes; constatar que desde estas categorías el cuadrado es un rectángulo y es también un rombo. Una tabla puede ayudar en el proceso de síntesis de las conclusiones.
- Este análisis se puede realizar también con los triángulos. Se pueden establecer algunas conjeturas para los polígonos regulares de n lados, en relación con el número de ejes de simetría.

Ejemplo C Demostrar que si por el punto medio de la diagonal de un rectángulo se traza una perpendicular a ésta, se divide al rectángulo en dos trapezios congruentes.



INDICACIONES AL DOCENTE:

- Observe que esta demostración es otra forma de plantear el problema relativo a la división de un rectángulo en dos partes congruentes.
- Interesa recoger las diversas formas de abordar y resolver esta demostración: el tipo de argumento que se plantea, el trazado de segmentos, la mirada hacia triángulos congruentes o hacia la presencia de un rombo, el tipo de conclusión que se propone, etc.

Ejemplo D Demostrar que si en una circunferencia dos cuerdas están a la misma distancia del centro, tienen la misma longitud.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es necesario que los estudiantes manipulen figuras, las doblen, recorten, etc. Para muchos este tipo de actividad les abre las posibilidades de entender y encontrarle sentido a las demostraciones.

4. Actividades relativas a los aportes de Euclides a desarrollo del pensamiento geométrico

Actividad

Recopilar y organizar información relativa a Euclides y a sus aportes a la geometría.

INDICACIONES AL DOCENTE:

- Es interesante que los estudiantes se informen sobre el libro *Los Elementos* de Euclides y se aproximen a la percepción de la organización formal de los axiomas y teoremas geométricos planteados en aquella época.

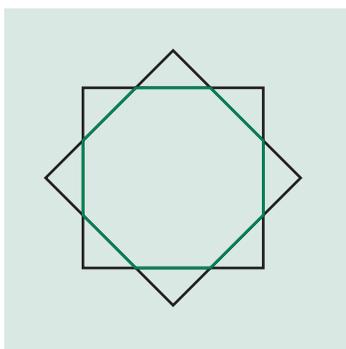
Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

Analizar distintas figuras geométricas para encontrar las condiciones necesarias y suficientes que las determinan. Relacionar esas condiciones con criterios de congruencia. Establecer los criterios de congruencia para los triángulos.

Ejemplo Esta es una actividad que puede ser desarrollada en grupo.

Considerar la siguiente figura; ¿cuál es la información mínima que se puede proponer para que otro la pueda dibujar, sin incluir un dibujo de ella?



INTERESA OBSERVAR:

- Si discriminan las figuras involucradas y cómo se relacionan.
- Si optan por las medidas de los lados.
- Si incorporan las medidas de las diagonales.
- Si pueden hacer más de un mensaje.

Actividad 2

Armar y desarmar puzzles que involucran congruencia de trazos, de ángulos, de triángulos, de figuras en general.

Ejemplo En una estrella de cinco puntas, ¿cuántos ejes de simetría se pueden trazar?

INTERESA OBSERVAR:

i) Si para visualizar los ejes de simetría, necesitan trazar líneas, hacen dobleces.

Actividad 3

Resolver problemas que involucran congruencia de figuras (cuadriláteros, triángulos y circunferencia).

Ejemplo Demostrar que en un cuadrilátero equilátero las diagonales generan triángulos congruentes.

INTERESA OBSERVAR:

i) Si tienen disponible el cuadrado y el rombo como cuadriláteros equiláteros.

ii) Si logran explicar con argumentos claros, que se forman cuatro triángulos congruentes.

Actividad 4

Demostrar propiedades de cuadriláteros, triángulos o circunferencias utilizando los criterios de congruencia, los ejes o los centros de simetría.

Ejemplo A ¿Qué condiciones debe cumplir un triángulo para que una altura sea eje de simetría?

INTERESA OBSERVAR:

i) Si comprenden la pregunta.

ii) A qué tipo de triángulo recurren.

iii) Si aceptan que puede ser tanto uno equilátero como uno isósceles.

Ejemplo B En un cuadrado cualquiera ABCD, copiar un lado sobre la diagonal AC partiendo desde A; se obtiene el punto E. Trazar por E una perpendicular a AC generando los puntos M y N en los lados CD y CB respectivamente. Demostrar que los triángulos ABN, ANE, AEM y AMD son congruentes.

INTERESA OBSERVAR:

i) Si logran hacer la figura con los datos.

ii) Si visualizan alguna manera de iniciar una demostración.

iii) Si recortan el cuadrado y hacen dobleces.

Bibliografía

Centeno, Julia (1995). *Números decimales*, Editorial Síntesis, Madrid.

De Guzmán, Miguel (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*, Edipubli, Buenos Aires.

Gimeno, José y Pérez Gómez (1996). *Comprender y transformar la enseñanza*, Morata, Madrid.

Kline, Morris (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, Fondo de Cultura Económica, México.

Magnus, Hans (1998). *El diablo de los números*, Editorial Siruela, Madrid.

Navarro, Joaquín (1980). *La nueva matemática*, Salvat Editores, Barcelona.

Perero, Mariano (1994). *Historia e historias de matemáticas*, Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Socas M., Camacho M., Palarea M. y Hernández J. (1989). *Iniciación al álgebra*, Editorial Síntesis, Madrid.

Stewart, Ian (1998). *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy*, Crítica, Barcelona.

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios Primer a Cuarto Año Medio

Objetivos Fundamentales

1

Primer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.
2. Analizar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias; describir y analizar situaciones, con precisión.
3. Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.
4. Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.
5. Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.
6. Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas; analizar invariantes relativas a desplazamientos y cambios de ubicación utilizando el dibujo geométrico.

2

Segundo Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales, semejanza de figuras planas y nociones de probabilidad; iniciándose en el reconocimiento y aplicación de modelos matemáticos.
2. Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.
3. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
4. Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.
5. Analizar invariantes relativas a cambios de ubicación y ampliación o reducción a escala, utilizando el dibujo geométrico.

3

Tercer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.
2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.
3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.
4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.
5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

4

Cuarto Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de rectas y planos en el espacio, de volúmenes generados por rotaciones o traslaciones de figuras planas; visualizar y representar objetos del espacio tridimensional.
2. Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías determinista-aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.
3. Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos al análisis de situaciones y a la resolución de problemas.
4. Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.
5. Percibir la matemática como una disciplina que ha evolucionado y que continúa desarrollándose, respondiendo a veces a la necesidad de resolver problemas prácticos, pero también planteándose problemas propios, a menudo por el sólo placer intelectual o estético.

Contenidos Mínimos Obligatorios

1

Primer Año Medio

I. Números y Proporcionalidad

1. Números
 - a. Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.
 - b. Análisis de la significación de las cifras en la resolución de problemas. Conocimiento sobre las limitaciones de las calculadoras en relación con truncar y aproximar decimales.
 - c. Resolución de desafíos y problemas numéricos, tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de regularidades numéricas.
 - d. Comentario histórico sobre la invención del cero, de los números negativos y de los decimales.
 - e. Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.
2. Proporcionalidad
 - a. Noción de variable. Análisis y descripción de fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad. Tablas y gráficos.
 - b. Proporcionalidad directa e inversa. Constante de proporcionalidad. Gráfico cartesiano asociado a la proporcionalidad directa e inversa (primer cuadrante).
 - c. Porcentaje. Lectura e interpretación de información científica y publicitaria que involucre porcentaje. Análisis de indicadores económicos y sociales. Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto

2

Segundo Año Medio

I. Álgebra y Funciones

1. Lenguaje algebraico
 - a. Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.
 - b. Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias.
 - c. Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.
 - d. Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias. Uso de paréntesis.
2. Funciones
 - a. Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramos de consumo, por ejemplo, de agua, luz, gas, etc. Variables dependientes e independientes. Función parte entera. Gráfico de la función.
 - b. Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.
 - c. Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad.
 - d. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas. Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones. Análisis y pertinencia de las so-

3

Tercer Año Medio

I. Álgebra y Funciones

1. Álgebra
 - a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.
 - b. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. Intervalos en los números reales. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.

2. Funciones

- a. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$$y = x^2$$

$$y = x^2 \pm a, a > 0$$

$$y = (x \pm a)^{2, a > 0}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$
 Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x . Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

4

Cuarto Año Medio

I. Álgebra y Funciones

- a. Función potencia: $y = a x^n$, $a > 0$, para $n = 2, 3$ y 4 , y su gráfico correspondiente. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de a .
- b. Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras.
- c. Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.
- e. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

multiplicativo del porcentaje. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones.

- d. Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directa e inversa. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Construcción de tablas y gráficos asociados a problemas de proporcionalidad directa e inversa. Resolución de ecuaciones con proporciones.
- e. Relación entre las tablas, los gráficos y la expresión algebraica de la proporcionalidad directa e inversa. Relación entre la proporcionalidad directa y cocientes constantes y entre la proporcionalidad inversa y productos constantes.

II. Álgebra y Funciones

- a. Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas no fraccionarias y su operatoria. Múltiplos, factores, divisibilidad. Transformación de expresiones algebraicas por eliminación de paréntesis, por reducción de términos semejantes y por factorización. Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables.
- b. Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.
- c. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis.

- d. Comentario histórico sobre la evolución del lenguaje algebraico.
- e. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad. Interpretación geométrica de los productos notables.
- f. Ecuación de primer grado. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.

luciones. Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.

- e. Función valor absoluto: gráfico de esta función. Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real.
- f. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

- a. Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos.
- b. Teorema de Tales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.
- c. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Tales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

- d. Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.
- e. Uso de algún programa computacional geométrico que permita medir ángulos, y ampliar y reducir figuras.

- b. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x , deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentario sobre el Teorema de Fermat.
- c. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

- a. Demostración de los Teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.
- b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.

III. Estadística y Probabilidad

- a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.
- b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.
- c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

II. Geometría

- a. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.
- b. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Ángulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

III. Estadística y Probabilidad

- a. Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones.
- b. Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística.
- c. Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos.
- d. Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

III. Geometría**1. Congruencia**

- a. Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.
- b. Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.
- c. Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia. Aporte de Euclides al desarrollo de la Geometría.

2. Transformaciones

- a. Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados. Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.
- b. Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.
- c. Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.
- d. Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.

III. Estadística y Probabilidad

- a. Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.
- b. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.
- c. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal. Interpretaciones combinatorias.

*“Maestro, sé fervoroso.
Para encender lámparas haz de llevar fuego
en tu corazón.”*

Gabriela Mistral



www.mineduc.cl