# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Objetivos:

- ✓ Definir ecuación de segundo grado.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado aplicando propiedades de la igualdad.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado aplicando factorizaciones.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado completando el trinomio cuadrado perfecto.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado aplicando la formula general.
- ✓ Identificar la naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado analizando el discriminante.

Una ecuación con una incógnita es de segundo grado o cuadrática, cuando después de reducirla a su más simple expresión, el más alto grado de la incógnita es 2.

**La forma general de una ecuación de segundo grado es:**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

**en la cual a, b y c son los coeficientes**

Ejemplo:

Los coeficientes de la ecuación:

$$20x^2 - 61x + 8 = 0$$

son:

$$a = 20 \text{ , } b = -61 \text{ , } c = 8$$

La ecuación es *completa* cuando $a$, $b$ $y$ $c$ son distintos de cero, esto es la ecuación tiene el término cuadrado, el término lineal y el término independiente

## *Solución de ecuaciones de segundo grado en su forma incompleta:*

La ecuación es incompleta cuando $b = 0$ , $c = 0$ o ambos son cero. La ecuación incompleta tiene estas dos formas de presentación:

$$ax^2 + c = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$ax^2 + bx = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

La solución de ecuaciones de segundo cuya presentación es de la forma (2) es muy sencilla pues en ella solo se aplican trasposiciones simples, esto es:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Así la incógnita es igual a más o menos la raíz cuadrada del cociente del término independiente, entre el coeficiente de $x^2$, con el signo cambiado.

En la solución de la forma (3) solo hay que factorizar, de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Este último producto se anula si se anula uno de los dos factores. Así

para $x = 0$ tenemos una solución

y

para $a\,x + b = 0$ la otra

esto es:

$$x = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

La ecuación de segundo grado en que falta el término independiente tiene una raíz nula, y la otra es igual al coeficiente de $x$ tomado con signo contrario, dividido entre el coeficiente de $x^2$

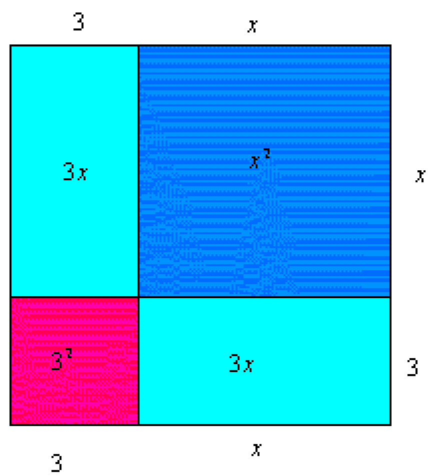
### *Resolución geométrica de la ecuación completa:*

Los algebristas antiguos resolvían las cuadráticas por procedimientos fundamentalmente geométricos, como el que consiste en completar un cuadrado, según se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$x^2 + 6x = 55$$




Trácese un cuadrado cualquiera de lado $x$ cuya área es $x^2$, colóquese, apoyados en los lados de $x^2$, dos rectángulos de bases iguales a 3 unidades ( 3 = mitad de 6, que es el coeficiente de el término lineal de la ecuación dada). Si a la figura resultante se le agrega el cuadrado de área $3^2$ se completa el cuadrado total (ver figura anterior), cuya superficie es:

$$\underbrace{\left(x^2+6x\right)}_{\text{en azules}}+\underbrace{\left(3^2\right)}_{\text{en violeta}}=\underbrace{\left(55\right)}_{\text{en azules}}+\underbrace{\left(9\right)}_{\text{en violeta}}$$

esto es:

$$x^2+6x+9=55+9$$

$$(x+3)^2=64$$

Despejando $x$ de esta última ecuación tenemos:

$$x + 3 = \sqrt{64}$$

$$x + 3 = 8$$

$$x = 5$$

Este procedimiento sólo proporciona la raíz positiva.

Para completar el cuadrado, se ha agregado a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal

Resolución algebraica de la ecuación completa:

Ejemplo:

Resolver:

$$x^2 + 11x - 60 = 0$$

| | |
|---|---|
| Pásese el término independiente al segundo miembro | $x^2 + 11x = 60$ |
| Agréguese el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal a cada miembro para completar el trinomio cuadrado perfecto | $x^2 + 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 60 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$ |

| | |
|---|---|
| Exprese el trinomio cuadrado perfecto como binomio al cuadrado | $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2=60+\frac{121}{4}=\frac{361}{4}$ |
| Extráigase la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación | $\sqrt{\left(x+\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{361}{4}}$ <br> $x+\frac{11}{2}=\pm\sqrt{\frac{361}{4}}$ |
| Despeje $x$ | $x=-\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}}$ <br> eso es: <br> $x=-\frac{11}{2}\pm\frac{19}{2}$ |
| Las soluciones son: | $x_1=4$ <br> $x_2=-15$ |

***Fórmula general:***

Resolver la ecuación literal:

$$ax^2+bx+c=0$$

| | |
|---|---|
| Divídase cada término entre a, para reducir este caso a la forma anterior, y luego proceder de igual manera | $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ |
| Pásese el término independiente al segundo miembro | $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ |
| Agréguese el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal a cada miembro para completar el trinomio cuadrado perfecto | $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ |
| Exprese el trinomio cuadrado perfecto como binomio al cuadrado | $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ |
| Extráigase la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación | $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ |

| | |
|---|---|
| Despeje $x$ | $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <br> eso es: <br> $\boxed{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ |
| Las soluciones son: | $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <br> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |

Ejemplo 1.-

Resolver aplicando la fórmula general

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Solución:

Sea

$$a = 1 \quad b = -9 \quad c = 20$$

Sustituyendo en la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{81 - 4(1)(20}}{2(1)} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

la raíces son:

$$x_1 = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{9-1}{2} = 4$$

Ejemplo:

Resolver aplicando la fórmula general

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{12}$$

Para poder aplicar la fórmula general deberemos de reducir la ecuación a su forma general, para ello realizaremos las operaciones con las fracciones algebraicas con el propósito de expresar la ecuación como una proporción, esto es:

$$\frac{(1)(x+1)+(1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5}{12}$$

esto es:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{5}{12}$$

Como el producto de los medios es igual al producto de los extremos tenemos que:

$$(2x)(12) = (5)(x^2 - 1)$$

$$24x = 5x^2 - 5$$

Trasponiendo llegamos a la forma general de la ecuación de segundo grado:

$$-5x^2 + 24x + 5 = 0$$

Con $a = -5$, $b = 24$, $c = 5$, aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{-(24) \pm \sqrt{(24)^2 - 4(-5)(5)}}{2(-5)} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 100}}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-24 + 26}{-10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-24 - 26}{-10} = 5$$

Comprobación:

$$\frac{1}{5-1} + \frac{1}{5+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{5} - 1} + \frac{1}{-\frac{1}{5} + 1} = \frac{1}{-\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{6} + \frac{4}{5} = \frac{5}{12}$$

Ejemplo:

Resolver aplicando la fórmula general

$$mnx^2 - (m+n)x + 1 = 0$$

Sean:

$$a = mn$$

$$b = -( m + n )$$

$$c = 1$$

Aplicando la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4mn}}{2mn}$$

esto es:

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}}{2mn}$$

esto es:

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{m^2 - 2mn + n^2}}{2mn}$$

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{(m-n)^2}}{2mn}$$

$$x = \frac{(m+n) \pm (m-n)}{2mn}$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{m+n+m-n}{2mn} = \frac{2m}{2mn} = \frac{1}{n}$$

$$x_2 = \frac{m+n-m+n}{2mn} = \frac{2n}{2mn} = \frac{1}{m}$$

Comprobación:

$$mn \times \frac{1}{n^2} - (m+n)\frac{1}{n} + 1 = \frac{m}{n} - \frac{m}{n} - 1 + 1 = 0$$

$$mn \times \frac{1}{m^2} - (m+n)\frac{1}{m} + 1 = \frac{n}{m} - 1 - \frac{n}{m} + 1 = 0$$

***La naturaleza de las raíces:***

Las raíces de la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El radicando, o sea, el binomio

$$\boxed{b^2 - 4ac},$$

se llama ***discriminante***

o binomio característico de la ecuación de segundo grado. El carácter de las raíces depende de dicho binomio y basta una simple inspección de él para conocer la naturaleza de dichas raíces, sin necesidad de resolver la ecuación.

| ecuación | Discriminante | Soluciones: |
|---|---|---|
| $x^2 - 4x + 3 = 0$ | $(-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$ | $x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$ <br> $x = 3$ y $x = 1$ <br> (dos raíces reales diferentes) |
| $x^2 - 4x + 2 = 0$ | $(-4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8 = 8$ | $x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$ <br> (dos raíces reales diferentes) |
| $x^2 - 4x + 4 = 0$ | $(-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$ | $x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$ <br> Una raíz real (doble) |
| $x^2 - 4x + 5 = 0$ | $(-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$ | $x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ <br> raíces complejas |

**Así tenemos que:**

- ✓ **Si** $b^2 - 4ac > 0$ **las raíces son reales y diferentes.**

- ✓ **Si** $b^2 - 4ac < 0$ **entonces** $\sqrt{b^2 - 4ac}$ **es imaginario, las raíces son complejas.**

- ✓ **Si** $b^2 - 4ac = 0$ **las raíces son reales, iguales , o sea hay una raíz doble.**