



MAB07 - KERTAUS

Kertaus – tässä osiossa käydään läpi kustakin osiosta perustehtävä ja vaativampi tehtävä



MAB07 - KERTAUSTEHTÄVÄT

- Osa21-
prosenttilaskenta
- Osa22-ansiotulon
verotus
- Osa23-muut verot
- Osa32-yksinkertainen
korkolasku
- Osa33-koronkorko
- Osa41-sijoittaminen
- Osa42-lainat
- Osa 51-valuutat
- Osa52-indeksit
- Osa53-inflaatio ja
rahan arvo



53 INFLAATIO JA RAHAN OSTOVOIMA

Perustehtävä

- Tehtävä 229
 - Inflatointi verrannon avulla

Vaativampi tehtävä

- Tehtävä 219
 - Inflaatio + yhtälö
- Tehtävä 223
 - Reaalin arvon muutos, deflatointi
- Tehtävä 232
 - Rahan ostovoiman ja inflaation vertailu



TEHTÄVÄ 232

232. Rahamäärällä a saadaan alussa tuotetta määrä b , jolloin tuotteen hinta $\frac{a}{b}$.

Jos ostovoima laskee 15 %, rahamäärällä a saadaan tuotetta enää määrä $(1 - 0,15)b = 0,85b$,
jolloin tuotteen hinta on $\frac{a}{0,85b} = 1,1764... \frac{a}{b}$.

Tuotteen hinta on noussut

$$1,1764... \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0,1764... \frac{a}{b} \approx 0,18 \frac{a}{b}$$

eli inflaatio on ollut 18 %.



TEHTÄVÄ 229

229. Muutetaan markat ensin euroiksi.

$$1800 \text{ mk} = \frac{1800}{5,94573} \text{ €} = 302,738... \text{ €} \approx 302,74 \text{ €}$$

Inflatoidaan tämä vuoden 2000 rahaksi.

$$\frac{651}{1501} = \frac{302,74}{x}$$

$$651x = 454412,74 \quad | :651$$

$$x = 698,022...$$

Vastaus: 700 € (698,02 €)



TEHTÄVÄ 223

Merkitään muutoskerrointa kirjaimella q .

Deflatoidaan 128 000 € vuoden 2001 rahaksi.

$$128000 \text{ €} \cdot \frac{1}{1,02^4} = 118252,214... \text{ €}$$
$$\approx 118252,21 \text{ €}$$

$$95000 \cdot q^4 = 118252,21 \quad | :95000$$

$$q^4 = 1,2447...$$

$$q = \pm \sqrt[4]{1,2447...}$$

$$q = \pm 1,0562...$$

Muutoskerroin aina positiivinen, joten $q = 1,0562...$

Vuosittainen muutos 5,6 %.



TEHTÄVÄ 219

Makkara v. 1980 2,32 €/kg
v. 2004 3,28 €/kg

a) Makkaran kilohinta:

$$\frac{3,28}{2,32} = 1,41379... \approx 1,414$$

Kilohinta on 1,414-kertaistunut eli noussut 41,4 %, joka on näin ollut inflaatioprosentti mainitulla aikavälillä.

b) Hinta on x -kertaistunut vuosittain.

$$2,32 \cdot x^{24} = 3,28 \quad | : 2,32$$

$$x^{24} = 1,413...$$

$$x = \sqrt[24]{1,413...}$$

$$x = 1,01453...$$

$$x \approx 1,015$$

Vuosittain hinta 1,015-kertaistuu eli vuotuinen inflaatio on 1,5 %.



52 INDEKSIT

Perustehtävä

○ Kertaustehtävä 37

- Indeksien laskeminen

Vaativampi tehtävä

○ Kertaustehtävä 40

- Ryhmäindeksin sovellus



KERTAUSTEHTÄVÄ 40

40. Olkoon kokeen arvosana x .

$$0,2 \cdot 9 + 0,15 \cdot 8,5 + 0,2 \cdot 8 + 0,05 \cdot 7 + 0,4x \geq 8,5$$

$$5,025 + 0,4x \geq 8,5$$

$$0,4x \geq 3,475$$

$$x \geq 8,6875$$

Helin on saatava kokeesta vähintään 9-.



KERTAUSTEHTÄVÄ 37

37. a) Perusajankohdan v. 2001 indeksiluku on 100.

$$\text{v. 2002: } \frac{88000\text{€}}{82000\text{€}} = 1,0731... = 107,31...\% \approx 107,3\%$$

$$\text{v. 2003: } \frac{95000\text{€}}{82000\text{€}} = 1,1585... = 115,85...\% \approx 115,9\%$$

$$\text{v. 2004: } \frac{100000\text{€}}{82000\text{€}} = 1,2195... = 121,95...\% \approx 122,0\%$$

$$\text{v. 2005: } \frac{110000\text{€}}{82000\text{€}} = 1,3414... = 134,14...\% \approx 134,1\%$$

Indeksisarja on 100, 107, 116, 122, 134.

b) Asunnon hinta olisi 1,341...-kertaistunut:

$$1,314... \cdot 105000\text{€} = 140853,65...\text{€} \approx 141000\text{€}$$



51 VALUUTAT

Perustehtävä

- Tehtävä 184
 - rahanvaihto

Vaativampi tehtävä

- Tehtävä 197
 - devalvointi



TEHTÄVÄ 197

197. Alussa 1 zloty = a €

Lopussa 1 zloty = $(1 - 0,16)a$ € = $0,84a$ €

Turistilla alussa määrä b euroja. Vaihtaessa hän saa zlotyja määrän $\frac{b}{a}$.

Devalvoitumisen jälkeen turistilla määrä b euroja. Vaihtaessa hän saa zlotyja määrän

$$\frac{b}{0,84a} = \frac{1}{0,84} \frac{b}{a} = 1,190... \frac{b}{a}$$

eli saa 19% enemmän zlotyja.



TEHTÄVÄ 184

184. Käytetään matkavaluutan ostokurssia

$$\begin{array}{r} 1\text{€} = 145,54 \text{ JPY} \\ \hline \times \quad 10000 \text{ JPY} \end{array}$$

$$10000 \text{ JPY} = \frac{10000}{145,54} \text{€} = 68,709... \text{€} \approx 68,71 \text{€}$$



42 LAINAT

Perustehtävä

- Kertaustehtävä 29a
 - Annuiteetti, kaava

Vaativampi tehtävä

- Tehtävä 160
 - Tasalyhennyslaina + yhtälö



KERTAUSTEHTÄVÄ 29A

29. Laina-aika 15 vuotta

Lainasumma 130000 €

a) Kuukausikorko $\frac{4,8\%}{12} = 0,4\%$

Korkotekijä $100\% + 0,4\% = 100,4\% = 1,004$

Lyhennyskertoja $15 \cdot 12 = 180$

$$A = 130000 \text{ €} \cdot 1,004^{180} \cdot \frac{1 - 1,004}{1 - 1,004^{180}}$$

$$= 1014,538... \text{ €}$$

$$= 1014,54 \text{ €}$$



TEHTÄVÄ 160

160. Kuudessa vuodessa maksueriä
 $6 \cdot 12 = 72$ kpl

Lainaa lyhennetään kerralla

$$\frac{10000 \text{ €}}{72} = 138,888... \text{ €}$$
$$\approx 138,89 \text{ €}$$

Merkitään korkokerrointa kirjaimella k .
Ensimmäisen maksuerän korot ovat
 $k \cdot 10000 \text{ €}$.

Saadaan yhtälö

$$138,89 + 10000k = 200$$

$$10000k = 61,11 \quad | :10000$$

$$k = 0,006111$$

Lainan kuukausikorko on 0,6111 %.

Lainan vuosikorko on

$$12 \cdot 0,6111\% = 7,332\% \approx 7,33\%$$



41 SIJOITTAMINEN

Perustehtävä

- Tehtävä 156
 - Rahaston arvo
- Tehtävä 157
 - Osakkeen arvo, perusyhtälö

Vaativampi tehtävä

- Tehtävä 153
 - Pankkitalletus, yhtälö, koronkorko
- Tehtävä 154
 - Vakuutukset, geometrinen summa
- Tehtävä 155
 - Obligaatio, yhtälö



TEHTÄVÄ 157

157. Osakkeita x kpl
Ostoihin kului $13,20x$
Osinkoa saadaan $0,80x$
Myydessä saadaan osakkeista
 $(13,20 + 0,60)x = 13,80x$

$$13,80x + 0,80x = 12556$$

$$14,60x = 12556 \quad | :14,60$$

$$x = 860$$

Sijoittajalla oli 860 osaketta.



TEHTÄVÄ 156

156. Toukokuussa osuuksia yhteensä

$$\frac{1500}{4,21} + \frac{1500}{3,20} + \frac{1500}{4,10} + \frac{1500}{4,14} = 1553,217...$$

Salkun arvo toukokuussa

$$1553,217... \cdot 4,18 \text{ €} = 6492,447... \text{ €}$$

$$\approx 6492,45 \text{ €}$$

Koska rahastoon on sijoitettu

$$4 \cdot 1500 \text{ €} = 6000 \text{ €},$$

Perttu on voitolla 492,45 €.



TEHTÄVÄ 155

155. Nimellisarvo x

$$\text{Korko } \frac{2}{12} \cdot 0,05 \cdot x = 0,00833...x$$

$$0,00833...x + 1,08x = 9250,83$$

$$1,08833...x = 9250,83 \quad | :1,08833...$$

$$x = 8499,996...$$

$$x \approx 8500$$

Nimellisarvo oli 8500 €.



TEHTÄVÄ 154

Pääoma 1. vuoden jälkeen

$$1500 \cdot 1,08$$

Pääoma 2. vuoden jälkeen

$$1500 \cdot 1,08 + 1500 \cdot 1,08^2$$

Pääoma 15. vuoden jälkeen

$$1500 \cdot 1,08 + 1500 \cdot 1,08^2 + \dots + 1500 \cdot 1,08^{15}$$

$$= 1500 \cdot 1,08 \cdot \frac{1 - 1,08^{15}}{1 - 1,08}$$

$$= 43986,424\dots$$

Tuotto

$$43986,424\dots \text{€} - 15 \cdot 1500 \text{€} = 21486,424\dots \text{€}$$

Nettotuotto

$$0,72 \cdot 21486,424\dots \text{€} = 15470,225\dots \text{€}$$
$$\approx 15470,23 \text{€}$$



TEHTÄVÄ 153

153. Talletussumma x

Nettokorkokanta $0,72 \cdot 2,4 \% = 1,728 \%$

Korkotekijä 1,01728

$$(1,01728^2 + 0,72 \cdot 0,045) \cdot x = 1707,61$$

$$1,067...x = 1707,61 \quad | :1,067...$$

$$x = 1599,996... \approx 1600$$

Summa oli 1600 €.



32 YKSINKERTAINEN KORKOLASKU

Perustehtävä

○ Tehtävä 95

- Kaavan käyttö, myös yhtälö

Vaativampi tehtävä

○ Tehtävä 109

- Kaava + aritmeettinen summa eli säännöllisesti toistuvat talletukset



TEHTÄVÄ 109

Talletus	Korkoaika vuosina	Korko (€)
50 €	$\frac{11}{12}$	$50 \cdot 0,0184 \cdot \frac{11}{12}$
50 €	$\frac{10}{12}$	$50 \cdot 0,0184 \cdot \frac{10}{12}$
\vdots	\vdots	\vdots
50 €	$\frac{1}{12}$	$50 \cdot 0,0184 \cdot \frac{1}{12}$

Korot vuoden lopussa

$$50 \cdot 0,0184 \cdot \frac{11}{12} + 50 \cdot 0,0184 \cdot \frac{10}{12} + \dots + 50 \cdot 0,0184 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 50 \cdot 0,0184 \cdot \left(\frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \dots + \frac{1}{12} \right)$$

$$= 50 \cdot 0,0184 \cdot 11 \cdot \frac{\frac{11}{12} + \frac{1}{12}}{2}$$

$$= 5,06 \text{ (€)}$$

Tilillä on rahaa vuoden lopussa
 $11 \cdot 50 \text{ €} + 5,06 \text{ €} = 555,06 \text{ €}$

Vastaus: 555,06 €



TEHTÄVÄ 95

95. Pääoma k

Kasvanut pääoma 231,80 €

Nettokorkokanta

$$0,72 \cdot 1,30 \% = 0,936 \% = 0,00936$$

$$K = k + kit = k(1+it) = k(1+i) = k \cdot 1,00936$$

Vuoden aikana pääoma 1,00936-kertaistuu:

$$1,00936 \cdot k = 231,80 \quad | :1,00936$$

$$k = 229,650\dots$$

$$k \approx 229,65$$

Lauri talletti 229,65 €.



33 KORONKORKO

Perustehtävä

○ Tehtävä 113

- Kaava $K = kq^t$, K:n laskeminen

Vaativampi tehtävä

○ Tehtävä 112

- Kaava + yhtälöt

○ Tehtävä 121

- Kaava + geometrinen summa eli toistuvat talletukset

○ Tehtävä 123

- Diskonttaus



TEHTÄVÄ 113

113. Lasketaan sijoitusvakuutuksen kasvanut arvo 7 vuoden kuluttua

$$180 \cdot 1,026^7 = 215,428\dots$$

$$\approx 215,43$$

Korkoa oli siis kertynyt

$$215,43\text{€} - 180\text{€} = 35,43\text{€} > 16,80\text{€}$$

Vastaus: Ei toteutunut



TEHTÄVÄ 123

123. Diskontataan kummassakin maksutavassa kaikki rahasummat kaupantekohetkeen.

Maksutapa 1:

$$50000 + 50000 \cdot 1,064^{-2}$$

Maksutapa 2:

$$a + 60000 \cdot 1,064^{-5}$$

Saadaan yhtälö

$$a + 60\,000 \cdot 1,064^{-5} = 50\,000 + 50\,000 \cdot 1,064^{-2}$$

$$a = 50\,000 + 50\,000 \cdot 1,064^{-2} - 60\,000 \cdot 1,064^{-5}$$

$$a = 50\,166,834\dots$$

$$a \approx 50\,166,83$$

Vastaus: 50166,83 € (tai 50167 €)

$$x \cdot 1,064^2 = 50000 \quad | :1,064^2$$

$$x = 50000 \cdot 1,064^{-2}$$

Siis: kun käytetään
koronkorkokaavaa $K = kq^n$ ja
mennään ajassa eteenpäin esim
2 vuotta, $n = 2$, kun mennään
ajassa taaksepäin, $n = -2$



TEHTÄVÄ 121

121. Merkitään kertatalletusta kirjaimella x .

1. talletus kymmenen vuoden kuluttua $x \cdot 1,0125^{10}$

2. talletus yhdeksän vuoden kuluttua $x \cdot 1,0125^9$

\vdots

10. talletus vuoden kuluttua $x \cdot 1,0125$

$$x \cdot 1,0125^{10} + x \cdot 1,0125^9 + \dots + x \cdot 1,0125 = 2500$$

$$\underbrace{(1,0125^{10} + 1,0125^9 + \dots + 1,0125)}_{\text{Geometrisen summan kaava}} x = 2500$$

$$\text{Geometrisen summan kaava } a_1 = 1,0125^{10} \quad q = 1,0125^{-1}$$

$$10,7139\dots x = 2500 \quad | :10,7139\dots$$

$$x = 233,3409\dots$$

Vastaus: 233,34 €



TEHTÄVÄ 112

a) Merkitään korkokerrointa kirjaimella q .

Saadaan yhtälö

$$500 \cdot q^5 = 520 \quad | :500$$

$$q^5 = 1,04$$

$$q = \sqrt[5]{1,04}$$

$$q = 1,007874...$$

Tilin korkokanta on

$$1,007874 - 1 = 0,007874$$

$$\approx 0,79\%$$

b) Korkokerroin $q = 1,012$

Saadaan yhtälö

$$500 \cdot 1,012^n = 600 \quad | :500$$

$$1,012^n = 1,2$$

$$\lg 1,012^n = \lg 1,2$$

$$n \cdot \lg 1,012 = \lg 1,2 \quad | : \lg 1,012$$

$$n = \frac{\lg 1,2}{\lg 1,012}$$

$$n = 15,284...$$

Vastaus: 16 vuoden kuluttua
(15. vuoden aikana)



23 MUUT VEROT

Perustehtävä

○ Tehtävä 42

- Pääomaveron laskeminen

Vaativampi tehtävä

○ Tehtävä 46

- Perintövero

○ Kertaustehtävä 12

- ALV



KERTAUSTEHTÄVÄ 12

12. Mansikanviljelijän verollinen hinta

$$1,9\text{ €} \cdot 1500 = 2850\text{ €}$$

Veroton hinta

$$x \cdot 1,17 = 2850 \quad |:1,17$$

$$\frac{2850}{1,17} \text{ €} = 2435,897... \text{ €} \approx 2435,90 \text{ €}$$

$$\text{Veroa } 2850 \text{ €} - 2435,90 \text{ €} = 414,10 \text{ €}$$

Kauppiaan verollinen hinta

$$1500 \cdot 3,20 \text{ €} = 4800 \text{ €}$$

Veroton hinta

$$y \cdot 1,17 = 4800 \quad |:1,17$$

$$\frac{4800 \text{ €}}{1,17} = 4102,564... \text{ €} \approx 4102,56 \text{ €}$$

$$\text{Veroa } 4800 \text{ €} - 4102,56 \text{ €} = 697,44 \text{ €}$$

Kauppias tilittää veroa

$$697,44 \text{ €} - 414,10 \text{ €} = 283,34 \text{ €}$$



TEHTÄVÄ 46

46. Perintö 134 328 € pyöristetään verotuksessa arvoon 134 300 €. Vaarilta saatava perintö verotetaan 1. kalleusluokan mukaan. Perintö on luokassa 50 000–. Vero alarajan kohdalla on 5735 €. Vero ylimenevältä osalta on 16 %: $0,16 \cdot (134300 \text{ €} - 50000 \text{ €}) = 13488 \text{ €}$

Veroa maksetaan yhteensä
 $5735 \text{ €} + 13488 \text{ €} = 19223 \text{ €}$.

1. Ensimmäiseen veroluokkaan kuuluvat esimerkiksi aviopuoliso, lapset, vanhemmat ja isovanhemmat. Nämä maksavat perintö- ja lahjaveroa suoraan perintöverotaulukon mukaan.
2. Toiseen veroluokkaan kuuluvat esimerkiksi sisarukset sekä heidän lapsensa. Nämä maksavat perintö- ja lahjaveron kaksinkertaisena.
3. Kolmanteen veroluokkaan kuuluvat kaukaisemmat sukulaiset, kuten serkut ja vieraat. Nämä maksavat perintö- ja lahjaveron kolminkertaisena.

Verotettavan omaisuuden arvo (€)	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla (€)	Veroprosentti ylimenevästä osasta
3400–17 000	85	10
17 000–50 000	1445	13
50 000–	5735	16



TEHTÄVÄ 42

42. Ilmari maksaa 28 % veron vain luovutusvoitosta

$$40000 \text{ €} - 35000 \text{ €} = 5000 \text{ €} \text{ eli}$$

$$0,28 \cdot 5000 \text{ €} = 1400 \text{ €}.$$



22 ANSIOTULON VEROTUS

Perustehtävä

○ Kertaustehtävä 7

- periaate

Vaativampi tehtävä

○ Kertaustehtävä 8

- Periaate + yhtälö



KERTAUSTEHTÄVÄ 8

8. Vero 2420 €

Vuositulot x

Saadaan yhtälö

$$(x - 20000) \cdot 0,195 + 860 = 2420$$

$$0,195x - 3900 + 860 = 2420$$

$$0,195x = 5460 \quad | :0,195$$

$$x = 28000$$

Vero alarajan kohdalla 860 €.

Vero ylimenevältä osalta

$$(x - 20000) \text{ €} \cdot 0,195$$

Tulot valtion verotuksessa olivat 28000 €.

Valtion verotulotaulukko 2006		
Verotettava ansiotulo	Vero alarajan kohdalla	Vero alarajan ylittävästä osasta %
12200-17000	8	9,0
17000-20000	440	14,0
20000-32800	860	19,5
32800-58200	3356	25,0
58200-	9706	32,5



KERTAUSTEHTÄVÄ 7

7. Valtion vero:

48000 € kuuluu tuloluokkaan 32800 – 58200.

Vero alarajan kohdalla 3356 €

Vero ylimenevältä osalta

$$(48000 \text{ €} - 32800 \text{ €}) \cdot 0,25 = 3800$$

Tulovero yhteensä $3800 \text{ €} + 3356 \text{ €} = 7156 \text{ €}$

Muut verot:

Kunnallisvero 19 %

Kirkollisvero 1,40 %

Eläkemaksu 4,30 %

Työttömyysvak.maksu 0,58 %

Yhteensä 25,28 %

Veroa maksettava

$$0,2528 \cdot 48000 \text{ €} = 12134,40 \text{ €}$$

Verot yhteensä

$$12134,40 \text{ €} + 7156 \text{ €} = 19290,40 \text{ €}$$

Nettoansiot

$$48000 \text{ €} - 19290,40 \text{ €} = 28709,60 \text{ €}$$



21 PROSENTTILASKENTA

Perustehtävä

- Tehtävä 9
 - Periaate

Vaativampi tehtävä

- Kertaustehtävä 4
 - Periaate + 2 muuttujaa
- Tehtävä 17
 - Periaate + yhtälö



TEHTÄVÄ 17

17. Merkitään alentamatonta hintaa kirjaimella x .

$$0,6 \cdot 0,3x = 6,55$$

$$0,18x = 6,55 \quad | :0,18$$

$$x = 36,388\dots$$

Vastaus: 36,39 €



KERTAUSTEHTÄVÄ 4 S171

4. Pakkauksen koko alussa a (kg)
Koko suurentamisen jälkeen $1,15a$ (kg)

Kilohinta alussa b (€/kg)

Kilohinta lopussa $0,95b$ (€/kg)

Pakkauksien hinta alussa ab

Pakkauksien hinta lopussa $1,15a \cdot 0,95b = 1,0925ab$

Pakkauksen hintaa nostettiin

$1,0925ab - ab = 0,0925ab$ eli 9,25 %.



TEHTÄVÄ 9

9. Merkitään lipun hintaa alussa kirjaimella a .
Lipun hinta muutosten jälkeen:
$$1,2 \cdot 1,1 \cdot 1,05a = 1,386a$$

Hinta nousi $38,6\% \approx 39\%$.



YO-TEHTÄVÄT KEVÄT 2009

14. Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.
- a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?
 - b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?



Yo 14

Lasketaan korkoa korolle eli kaavana on $K = kq^n$

Kun lähdevero pidätetään vuosittain, todellinen korko on $0,71 \cdot 1,5\% = 1,065\% = 0,01065$ (desimaalilukuna)

Korkotekijä q on $1 +$ todellinen korko des. lukuna
 $= 1,01065$ (desimaaliluku)

b-kohdassa kun kysytään eksponenttia, pitää aina ottaa logaritmi...

14. a) Talletuksen lähdeverotettu korko on $0,71 \cdot 1,50 = 1,065$, joten lähdeverotettu korkotekijä on $q = 1,01065$. Kymmenen vuoden kuluttua rahaa on tilillä $q^{10} \cdot 1000 \approx 1111,7517$ (euroa).

b) Jos talletus a kaksinkertaistuu n vuodessa, on $q^n a = 2a$ eli $q^n = 2$. Tästä saadaan
$$n = \frac{\log 2}{\log q} \approx 65,4302.$$

Vastaus: a) 1111,75 euroa, b) 66 vuoden kuluttua.

