Thème 12
Propriétés des Réseaux de Petri Places-Transitions

Contenu du thème

1. Séquences de franchissement
2. Propriétés comportementales
3. Analyse par graphe de marquage
4. Propriétés structurelles : analyse par algèbre linéaire

Note sur ce texte

Ce texte est largement tiré de la présentation de Razclos et complété par quelques commentaires et exemples provenant de Diaz et de Peterson.

Diaz, Michel (2001) **Les Réseaux de Petri – Modèles fondamentaux**, Hermes Science Publications : Paris.

Peterson, J. L. (1977) « Petri Nets », **Computing Surveys**, vol. 9, N° 3, pp 223-252.

Razclos (1998) Réseaux de Petri – cours de programmation des systèmes II. http://référenceweb

Présentation

Deux grandes caractéristiques des RdP seront examinées dans ce thème : le caractère borné du réseau et son degré d'activité. La première propriété répond à la question de savoir si le nombre de jetons circulant dans le réseau reste borné ou non. La seconde examine si une partie ou l'ensemble du réseau peut ou non évoluer.

Il existe plusieurs manières d'analyser les propriétés d'un réseau. L'analyse comportementale grâce aux graphes des marquages, l'analyse par algèbre linéaire, l'analyse structurelle, etc. La présente présentation s'intéresse aux deux premières méthodes.

Après avoir défini quelques propriétés des séquences de franchissement dans un réseau, nous définirons les propriétés comportementales des RdP (propriétés dépendantes d'un marquage initial) couvrant le caractère borné du réseau et son degré d'activités pour ensuite présenter une analyse de ces propriétés passant par les graphes de marquage et les graphes de couverture. Nous passerons ensuite à l'étude des propriétés structurelles des réseaux (propriétés indépendantes du marquage initial) et à leur analyse par un recours aux techniques de l'algèbre linéaire.

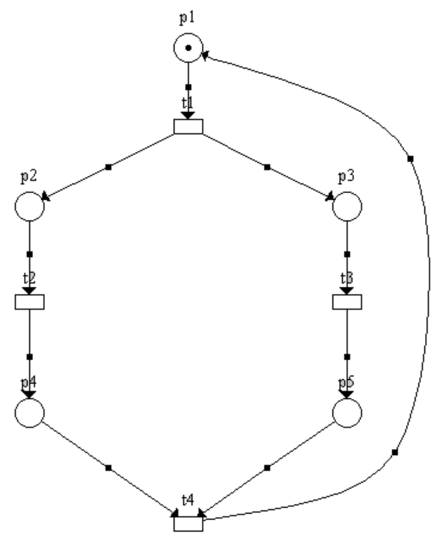
1 Séquences de franchissement

1.1 Définition et retour sur la représentation matricielle

Définition 1

Une séquence de franchissement « s » est une suite de transitions $\langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$ qui permet, à partir d'un marquage « M », de passer au marquage « M' » par le franchissement successif des transitions définissant la séquence.

Exemple 1

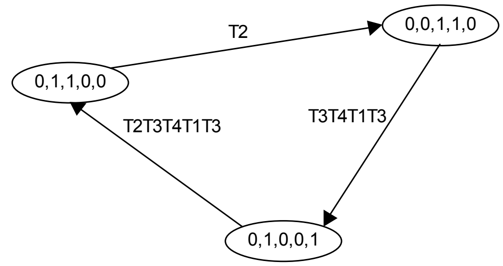


La séquence T_1T_2 est une séquence de franchissement. On pourrait noter : Si s = T_1T_2, alors $m_0[s\rangle m_2$. Par contre, la séquence T_1T_4 n'est pas une séquence de franchissement à partir de Mo.

Exemple 2

Évidemment, la définition 1 implique que le franchissement de la séquence « s » en question est réalisable à partir du marquage « M ». Ainsi, si le marquage initial du réseau de l'exemple 1 devient [1 0 0 1 1] la séquence T_1T_4 devient une séquence franchissable.

Exemple 3
Considérons le RdP de l'exemple 1. Voici quelques séquences possibles.



Calculons maintenant le nouveau marquage induit par le franchissement de la séquence $t_2t_3t_4t_1t_3$ à partir du marquage $M_o = (0,1,1,0,0)$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ce qui est bien le marquage attendu.

1.2 Propriétés des séquences de franchissement

A Existence d'un marquage

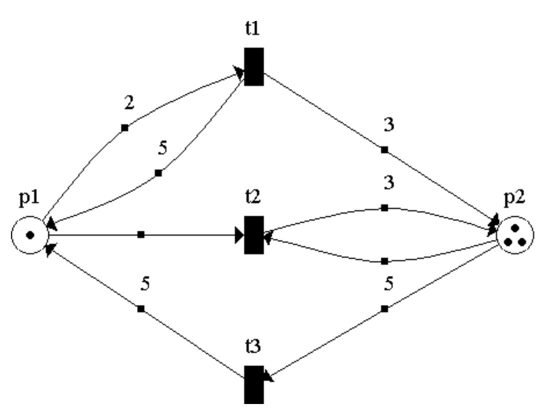
Pour toute séquence de transitions « s », il existe un marquage M tel que celle-ci soit franchissable :

$$\forall s \in T^*, \exists M \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } M[s\rangle$$

Exemple 4

Quels sont les **marquages minimum** de ce réseau tels que respectivement les séquences suivantes soient franchissables? $s_1 = t_2t_3$ et $s_2 = t_3t_2$

Pouvez-vous « généraliser »? Vérifiez cette généralisation en trouvant le marquage minimum pour que la séquence $s_3 = t_2t_2t_3t_1$ soit franchissable.



La généralisation vient d'une étude approfondie de l'équation générale. Toute séquence, pour être franchissable doit remplir ses « préconditions » (pour ainsi dire). Ainsi, si on détaille la séquence s_1,

$$M' = \boxed{M_o - \text{Pré}(\_, t_2) + \text{Post}(\_, t_2) - \text{Pré}(\_, t_3)} + \text{Post}(\_, t_3)$$

La section qui nous intéresse ici est celle qui est encadrée. On cherche M_o mais pas n'importe lequel. On cherche un M_o qui fera en sorte que la résolution de la section encadrée ne donne pas un résultat où apparaîtraient des nombres négatifs. Mais on veut en fait qu'avant tout tir de transition, on ait suffisamment de jetons dans les transitions pour tirer celle-ci. Ainsi, en ce qui concerne le tir de t_2, on a besoin d'au moins un marquage satisfaisant les préconditions de t_2. Ainsi, minimalement, $M_o = Pré(\_, t_2)$. Ainsi :

(1) $$M_o \geqslant Pré(\_, t_2)$$

De plus,

(2) $$M_1 \geqslant Pré(\_, t_3)$$

ou, si l'on détaille :

$$M_o + C(\_, t_2) \geqslant Pré(\_, t_3)$$

Il est clair que nous devons satisfaire ces deux contraintes. La seule façon de procéder est de trouver le maximum parmi tous les marquages proposés.

Essayons. D'après (1), on obtient un marquage M_o qui est :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ainsi } x \geqslant 2 \text{ et } y \geqslant 1 \text{ (c'est un minimum)}$$

D'après (2), on obtient un marquage Mo qui est :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ainsi } x \geqslant 2 \text{ et } y \geqslant 3.$$

Le marquage minimal pour que la séquence s_1 soit franchissable est donc : $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Pour la séquence s_2, on développe de la même façon. Développons notre équation :

$$M' = \boxed{M_o - Pré(\_, t_3) + Post(\_, t_3) - Pré(\_, t_2)} + Post(\_,t_2)$$

(3) $$M_o \geqslant Pré(\_, t_3)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ainsi $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 5$.

(4) $$M_o + C(\_, t_2) \geqslant Pré(\_, t_2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ainsi $x \geqslant -3$ et $y \geqslant 6$.

Pour « x », c'est donc dire que –3 jetons seraient acceptables en (4). Évidemment, on doit choisir le maximum de chacun des marquages pour arriver à la solution.

Le marquage minimal pour que la séquence s_2 soit franchissable est donc : $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

La généralisation est simple. Pour trouver le marquage minimal permettant le franchissement de la séquence $S = t_1t_2\ldots t_n$, on doit satisfaire toutes les contraintes :

$$M_o \geqslant Pré(\_, t_1)$$

$$M_o + C(\_, t_1) \geqslant Pré(\_, t_2)$$

$$\ldots$$

$$M_o + C(\_, s') \geqslant Pré(\_, t_n) \text{ où } (s' = t_1t_2\ldots t_{n-1})$$

Vérifions avec la séquence s3. On obtient les contraintes : (5) à (8) :

(5)

$$M_o \geqslant Pré(\_, t_2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ainsi $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$

(6)

$$M_o + C(\_, t_2) \geqslant Pré(\_, t_2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ainsi $x \geqslant 4$ et $y \geqslant -1$

(7)

$$M_o + C(\_, t_2t_2) \geqslant Pré(\_, t_3)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ainsi $x \geqslant -1$ et $y \geqslant 0$

(8)

$$M_o + C(\_, t_2t_2t_3) \leqslant Pré(\_, t_1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ainsi $x \geqslant -1$ et $y \geqslant 1$

Si l'on prend maintenant le maximum de chacun de ces marquages, on obtient, d'après (6) et (8) (mais aussi 5) le marquage minimal suivant : $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

B Monotonie

L'augmentation de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement d'une séquence de transitions :

Si

$$M_1[s\rangle M_2 \text{ et } M_1 \subseteq M_2$$

alors

$$M_2[s\rangle$$

Note : $M_a \subseteq M_b$ si et seulement si $\forall p \in P$, $M_a(p) \leqslant M_b(p)$.

De manière plus générale, on pourra dire qu'une propriété donné π d'un réseau est une propriété monotone si cette propriété se vérifie dans tous les marquages accessibles depuis M_o.

C Séquence répétitive

Une séquence de transitions est dite répétitive si pour tout marquage M tel que :

$$M[s\rangle$$

alors

$$M[s^*\rangle$$

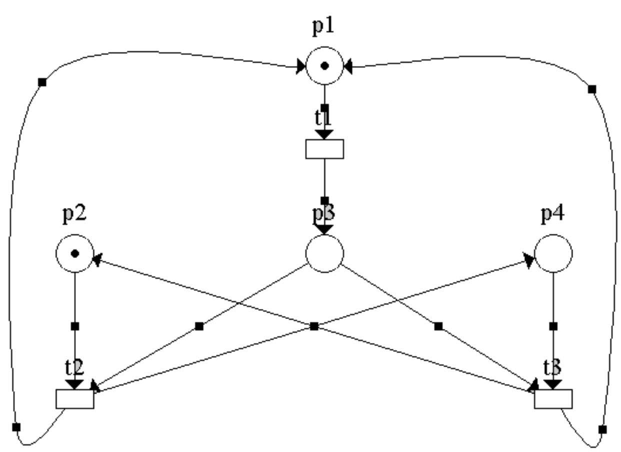
La notion de séquence répétitive permet de définir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau marqué ait la possibilité d'être infiniment actif.

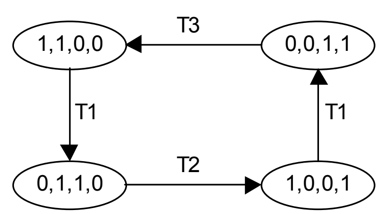
Cette définition permet de tirer le résultat suivant :

$$\forall M, M' \in \mathbb{N}^m$$

$$M[s\rangle M' \text{ et } M \subseteq M' \Leftrightarrow s \text{ est répétitive.}$$

Exemple 5
Quelles sont les séquences répétitives? Du réseau suivant :

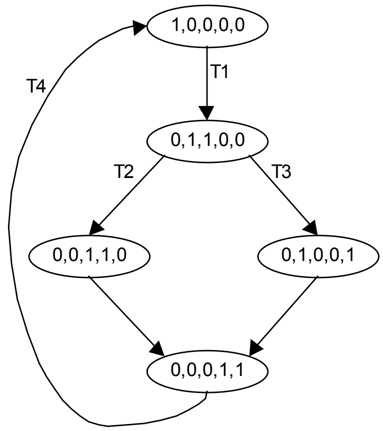




Si on examine le graphe des marquages, il est facile de voir que $t_1t_2t_1t_3$ est une séquence répétitive.

Exemple 6

Quelles sont les séquences répétitives dans le réseau de l'exemple 1? Il y en a deux : $t_1t_2t_3t_4$ d'une part et $t_1t_3t_2t_4$ d'autre part. Cela revient à trouver tous les cycles dans le graphe des marquages.



2 Propriétés comportementales

Les propriétés comportementales sont dépendantes d'un marquage initial. Si l'on change ce marquage, rien ne garantit (sauf dans certains cas précis) que les propriétés tiennent encore. Les propriétés qui sont structurelles c'est-à-dire qui sont indépendantes du marquage initial seront étudiées à la section 4 de ce thème.

2.1 Caractère borné

Cette propriété définit et caractérise la possibilité pour une place d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons au cours de l'évolution d'un réseau.

Place k-bornée, non bornée

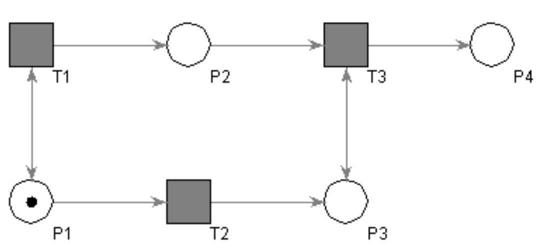
Pour un réseau R et un marquage M_o, une place « p » du réseau marqué (R,M_o) est **k-bornée** si pour tout marquage M accessible depuis M_o, $M(p) \leqslant k$. Dans le cas contraire la place « p » est dite **non-bornée**. Autrement dit :

$$p \text{ est k-bornée} \Leftrightarrow \forall M \in A(R,M_o),\ M(p) \leqslant k$$

Réseau borné

Un réseau marqué est borné si toutes ses places sont bornées. Les réseaux **1-bornés** sont appelés des réseaux **saufs**.

Exemple 7
Examinons le réseau suivant :



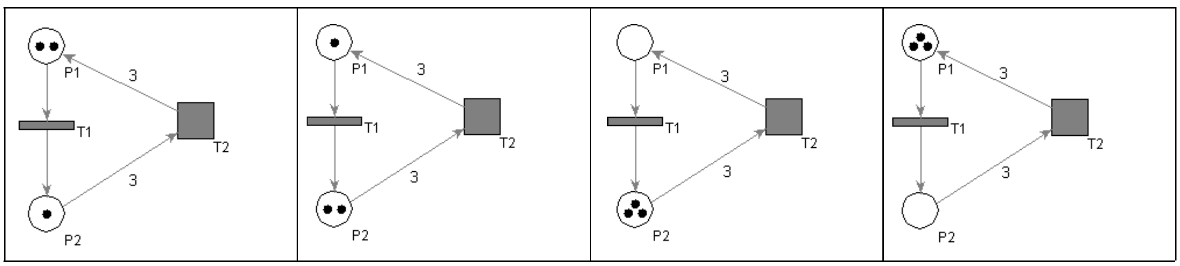
Il est facile de voir que le réseau n'est pas borné puisque la place P4 mémorise tous les tirs de T3. Voici quelques séquences qui montrent ce fait : $t_1t_1t_2t_3t_3$, $t_1t_1t_1t_1t_2t_3t_3t_3t_3$, et plus généralement : $t_1^{\,n}t_2t_3^{\,n}$.

La place P2 est également non bornée. Il suffit d'exécuter autant de fois que désiré, la transition T1. Par contre les places P1 et P3 sont 1-bornées.

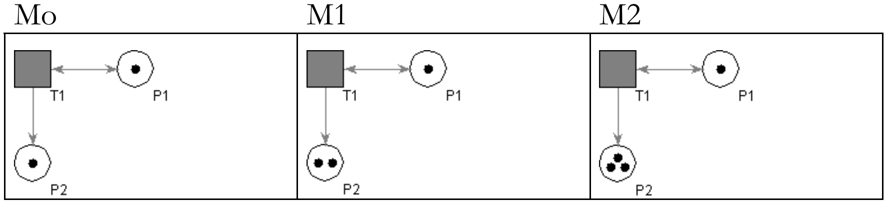
Le réseau n'est donc pas sauf et n'est pas borné.

Exemple 8
Le premier réseau est 3-borné puisque toutes ses places sont 3-bornées. De plus, la séquence t1t1t2t1 est répétitive et nous ramène toujours sur le marquage initial. Le second réseau n'est pas borné puisque la place P2 ne l'est pas. Par contre sa place P1 est 1-bornée. Il est facile de réaliser que la construction du graphes des marquages accessibles permet de vérifier cette propriété de chacun des réseaux.

Mo M1 M2 M3



Mo M1 M2



2.2 Activité d'un réseau

La notion d'activité d'un réseau recouvre deux classes de définitions. La première concerne l'activité individuelle des transitions, la seconde concerne l'activité globale d'un réseau (indépendamment de transitions particulières).

A Pseudo-vivacité

Un réseau de Petri (R,Mo) est dit pseudo-vivant si pour tout marquage accessible depuis le marquage initial, il existe toujours une transition « t » qui puisse être franchie. Autrement dit :

$$\forall M \in A(R,Mo),\ \exists t \in T \text{ tel que } m[t\rangle$$

B Quasi-vivacité

Quasi-vivacité d'une transition

La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial, cette transition peut être franchie au moins une fois. Autrement dit, pour un réseau marqué (R,M_o)

$$t \in T \text{ est quasi-vivante} \Leftrightarrow \exists M \in A(R,M_o) \text{ tel que } M[t\rangle$$

Conséquemment, une transition qui n'est pas quasi-vivante est inutile!

Quasi-vivacité d'un réseau

Un réseau est quasi-vivant si toutes ses transitions le sont.

Monotonie et quasi-vivacité

La propriété de monotonie présentée plus haut implique qu'une transition quasi-vivante pour (R,M) le reste pour (R,M') où $M \subseteq M'$

C Vivacité

Les deux propriétés précédentes assurent une certaine correction du système – mais elles ne permettent pas d'affirmer que, dans n'importe quel état atteint, le système dispose encore de toutes ses fonctionnalités. Autrement dit, si toute transition peut toujours être ultérieurement franchie à partir d'un état quelconque du système. (Diaz, p. 73) Par exemple, dans un réseau quasi-vivant une transition pourra être franchie une seule fois.

Vivacité d'une transition

La vivacité d'une transition exprime le fait que quelque soit l'évolution du réseau à partir du marquage initial, le franchissement à terme de cette transition est toujours possible. Autrement dit, pour un réseau marqué (R,M_o)

$$t \in T \text{ est vivante} \Leftrightarrow \forall M \in A(R,M_o), \text{ t est quasi-vivante pour M.}$$

Vivacité d'un réseau

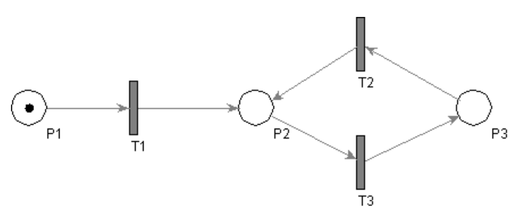
Un réseau est vivant si toutes ses transitions le sont. Autrement dit, le réseau de Petri (R,Mo) est vivant si, pour tout marquage $M \in A(R,Mo)$, le réseau (R,M) est quasi-vivant, c'est-à-dire :

$$\forall M \in A(R,Mo), \forall t \in T, \exists M' \in A(R,M) \text{ tel que } M'[t\rangle$$

Dans un tel réseau, on garantit que chaque transition soit tirable éventuellement peu importe l'état du système.

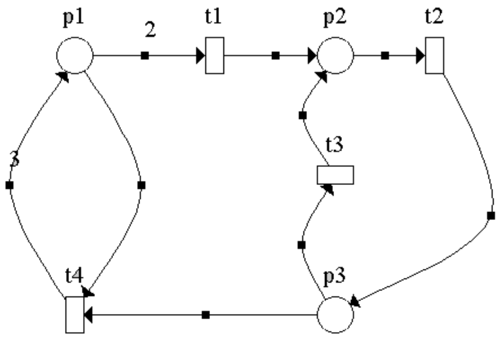
Exemple 9

Que peut-on dire à propos du réseau suivant :

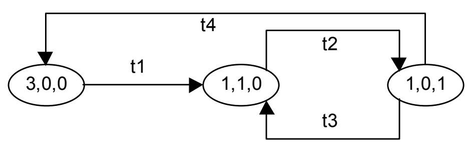
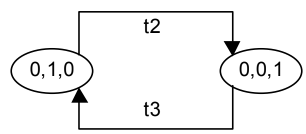


Il est quasi-vivant (t1 est tirable au moins une fois). Il est pseudo-vivant (il existe toujours une transition tirable). Il n'est pas vivant (car à un certain moment, il n'est plus possible de tirer t1).

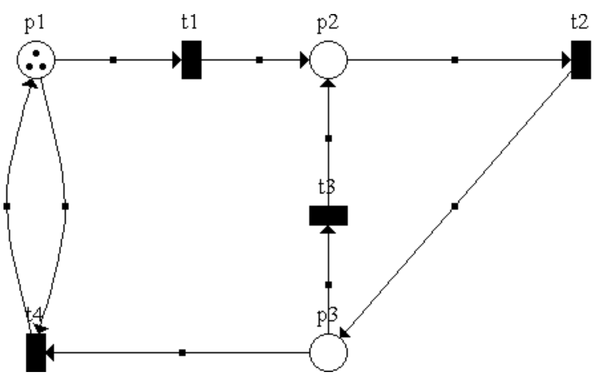
Exemple 10
Que peut-on dire de ce réseau? Prenez Mo = (3,0,0) et aussi (0,1,0)



Le réseau tel que présenté, admet les graphes de marquage suivants (considérant les deux marquages suggérés).

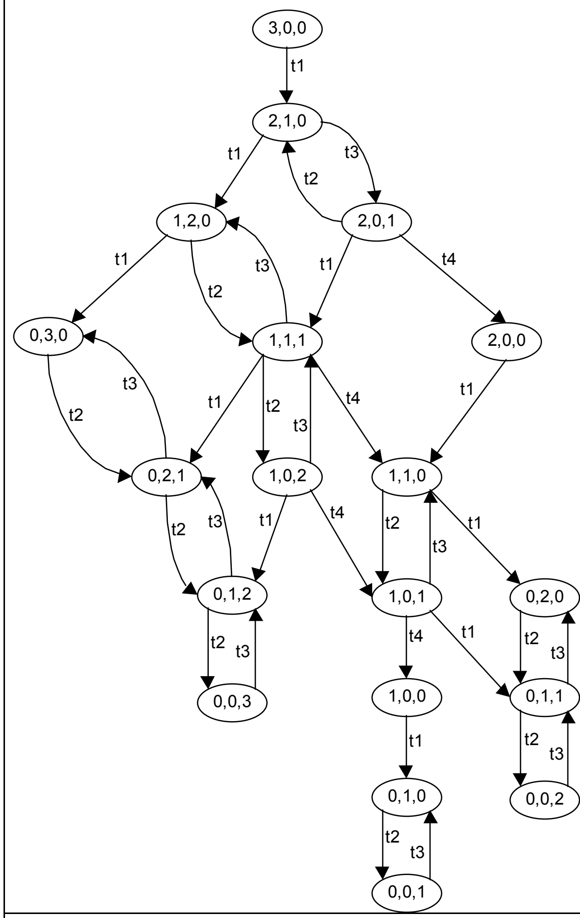
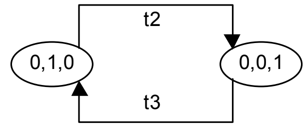
Avec Mo = (3,0,0)	Avec Mo = (0,1,0)
	
On peut facilement déduire que le réseau est vivant et donc, qu'il est quasi et pseudo vivant.	Le réseau est pseudo vivant et c'est tout.

Modifions quelque peu cet exemple de la manière suivante (les poids des arcs sont tous à un désormais) :



Nos deux marquages initiaux nous fournissent les graphes de marquage suivants :

Avec Mo = (3,0,0)	Avec Mo = (0,1,0)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>On peut facilement déduire que le réseau est quasi et pseudo vivant mais n'est pas vivant.</td>
<td>Le graphe des marquages est le même donc, le réseau est pseudo vivant et c'est tout.</td>
</tr>
</table>

D État d'accueil et réversibilité

État d'accueil

Un RdP possède un état d'accueil M_a pour un marquage initial M_o si pour tout marquage accessible M_i il existe une séquence « s » telle que $M_i[s\rangle M_a$. Autrement dit :

$$\forall M \in A(R,M_o),\ \exists s \in T^* \text{ tel que } M[s\rangle M_a$$

RdP réinitialisable (ou réversible)

Un RdP est réinitialisable (ou réversible) pour un marquage initial M_o si M_o est un état d'accueil.

E Absence de blocage

Cette propriété est plus faible que celle de vivacité. Elle implique seulement que le réseau a toujours la possibilité d'évoluer.

Marquage puits

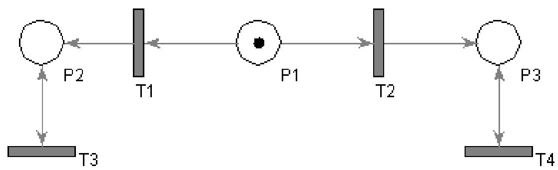
Un marquage puits est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable.

Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puits.

Remarque importante

On notera que la vivacité et l'absence de blocage sont deux notions bien distinctes. Un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune de ses transitions soient vivantes.

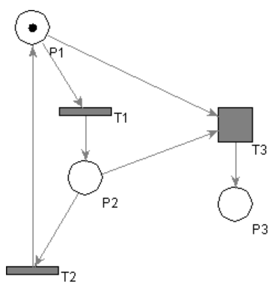
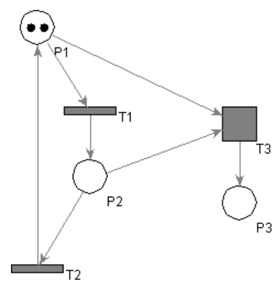
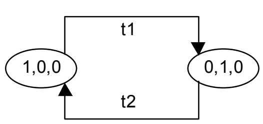
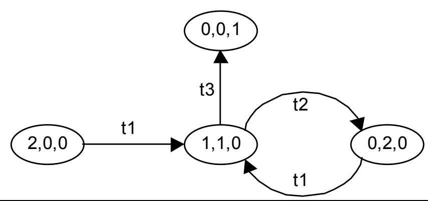
Exemple 11



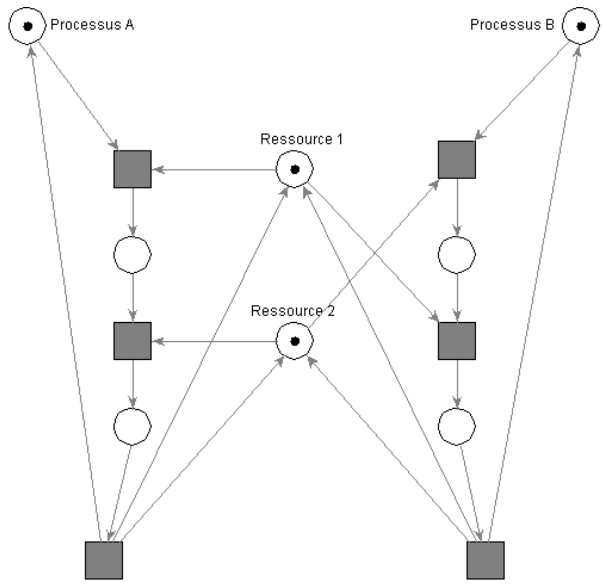
Ce réseau pseudo et quasi vivant.

Exemple 12

Que peut-on dire à propos de la vivacité de ce réseau et de sa dépendance au marquage initial?

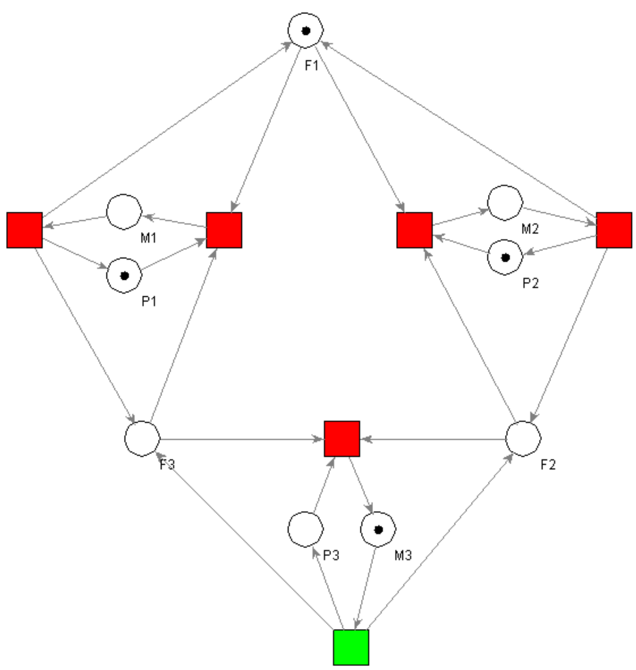
A	B
	
	
Il est pseudo vivant et sans blocage. Il n'est pas quasi vivant car « t3 » n'est jamais tirable. Évidemment, il n'est pas vivant.	Il n'est pas pseudo vivant (le marquage 0,0,1 bloque le réseau), il est quasi vivant (voir la définition). Il n'est évidemment pas vivant et il contient un blocage.

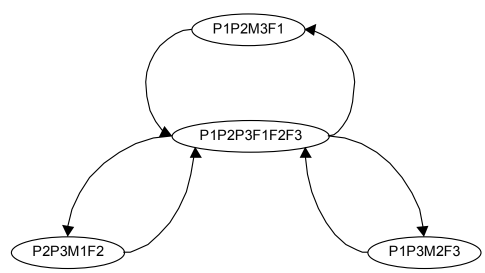
Exemple 13
Voici un bel exemple d'interblocage. Pouvez-vous détecter la séquence qui amènera ce réseau en blocage?



La séquence T_1T_4 mène au blocage.

Exemple 14
Voici un bel exemple d'un dîner célèbre. Le réseau est vivant. Le graphe des marquages le montre clairement.



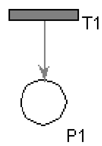
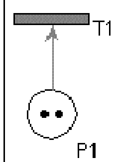
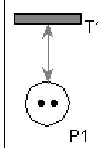
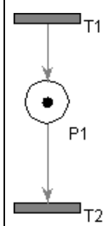
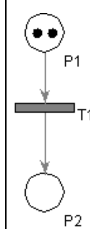


F Autres définitions

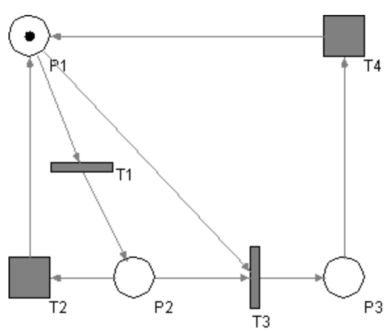
RdP répétitif

Un RdP est répétitif s'il existe un marquage initial M_o et une séquence « s » franchissable telle que chaque transition apparaît un nombre illimité de fois.

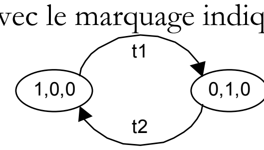
Exemple 15
Borné? Vivant? Sans blocage? Répétif? Répétitif croissant?

P	A	B	C	D	E
					
BORNÉ	NON	OUI	OUI	NON	OUI
VIVANT	OUI	NON	OUI	OUI	NON
SANS BLOC	OUI	NON	OUI	OUI	NON
RÉPÉTITIF	OUI	NON	OUI	OUI	NON

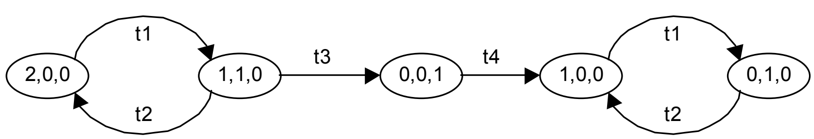
Exemple 16
Borné? Vivant? Sans blocage? et avec deux jetons dans la place P1?



Avec le marquage indiqué :



Réseau borné, non vivant, sans blocage.



Avec 2 jetons dans la place P1. Réseau borné, non vivant, sans blocage.

2.3 Relation entre les propriétés

Pseudo-vivacité, caractère non borné et séquence infinie

Si (R,Mo) est pseudo-vivant ou non borné, alors (R,Mo) admet une séquence infinie.

Vivacité, quasi-vivacité et pseudo vivacité

Si (R,Mo) est vivant, alors (R,Mo) est quasi-vivant et pseudo-vivant.

Quasi-vivacité et état d'accueil

Si (R,Mo) est quasi vivant et admet Mo pour marquage d'accueil, alors (R,Mo) est vivant.

Vivacité et séquence répétitive complète

Une séquence répétitive est dite complète si elle contient au moins une occurrence de chaque transition.

Un réseau marqué (R,M_o) est vivant si et seulement si pour tout marquage accessible M, $M \in A(R,M_o)$, il existe un marquage M' accessible depuis M et une séquence complète « s » tels que

$$M'[s\rangle$$

c'est-à-dire

$$(R,M_o) \text{ est vivant} \Leftrightarrow \forall M \in A(R,M_o), \exists M' \in A(R,M), \exists s \text{ complète tels que } M'[s\rangle$$

Caractère non borné et séquence répétitive croissante

Une séquence répétitive est dite croissante pour une place « p » si pour tout couple de marquages M, M' tel que :

$$M[s\rangle M'$$

alors

$$M'(p) > M(p)$$

Un réseau marqué (R,M_o) est **non-borné** si et seulement si il existe une séquence répétitive « s » croissante pour une place « p », un marquage M accessible depuis M_o tels que :

$$M[s\rangle$$

Ainsi le second réseau de l'exemple 7 est non borné, la séquence T1 étant une séquence répétitive croissante.

Monotonie et propriétés

Lors d'une modélisation, on est parfois amené, une fois la structure du réseau de Petri définie, à modifier le marquage initial afin d'examiner différentes hypothèses. Assez souvent, cette modification se traduit par un ajout de jetons dans les places. Aussi est-il intéressant de savoir si une propriété est conservée par l'ajout de jetons.

Soit un RdP (R,Mo) :

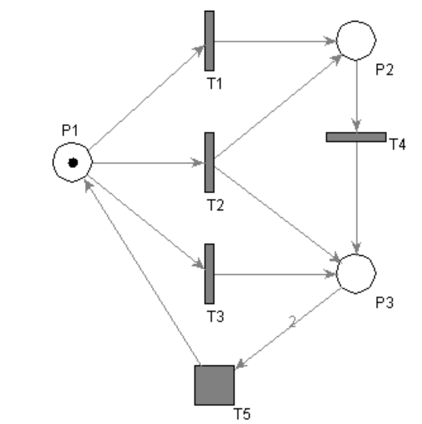
- ◊ La propriété « (R,Mo) admet une séquence infinie » est une propriété monotone.
- ◊ La propriété « (R,Mo) est pseudo-vivant » n'est pas une propriété monotone.
- ◊ La propriété « (R,Mo) est quasi-vivant » est une propriété monotone.
- ◊ La propriété « (R,Mo) est vivant » n'est pas une propriété monotone.
- ◊ La propriété « (R,Mo) admet un état d'accueil » n'est pas une propriété monotone.
- ◊ La propriété « (R,Mo) est non borné » est une propriété monotone.

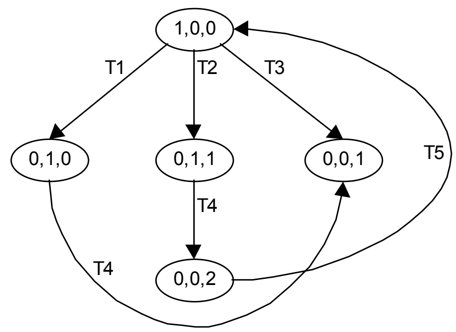
3 Graphe des marquages

Pour étudier les propriétés d'un réseau, il peut être commode de construire son graphe des marquages accessibles. Deux situations peuvent alors se présenter :

1. Le graphe est fini. C'est la situation la plus favorable car dans ce cas toutes les propriétés peuvent être déduites simplement par inspection de celui-ci. Nous avons déjà vu plusieurs exemples de cette utilisation.
2. Le graphe est infini. Dans ce cas, on construit un autre graphe appelé « graphe de couverture » permettant de déduire certaines propriétés. On peut également passé par un arbre de couverture.

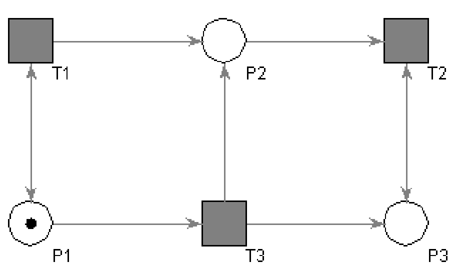
Exemple 17
Construisez le graphe des marquages du RdP suivant :

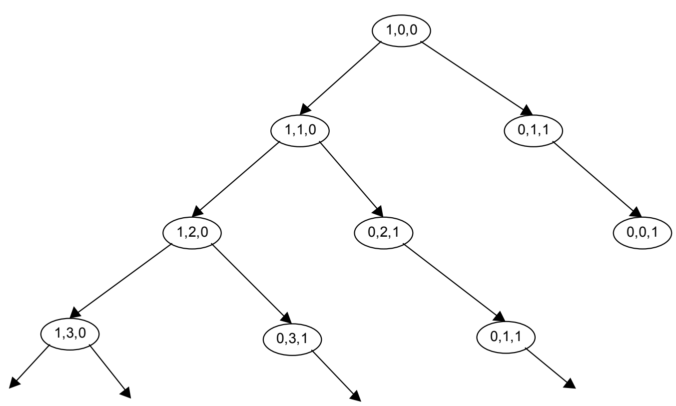




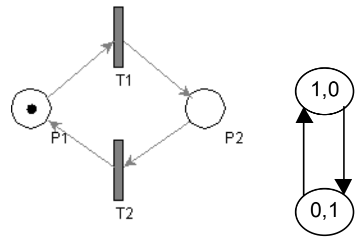
Réseau borné et vivant.

Exemple 18
Construisez l'arbre des marquages du RdP suivant. Y a-t-il un problème? Oui le réseau n'est pas borné.





Exemple 19
Construisez le graphe des marquages du RdP suivant :



Symbole omega

Ce symbole peut être considéré comme représentant une quantité arbitrairement grande de jetons, autrement dit une infinité $\omega \notin \mathbb{N}$. Ainsi, pour toute constante entière « n », on a :

$$\omega + n = \omega$$
$$\omega - n = \omega$$
$$n < \omega$$
$$\omega \leqslant \omega$$

Ce symbole va service à construire l'arbre ou le graphe de couverture dans le cas d'un marquage infini.

3.1 Arborescence de courverture

Notations

- ◊ $\mathbb{N}\omega$ est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$
- ◊ $\mathbb{N}_{\omega}^{m}$ est un vecteur à « m » composantes dans $\mathbb{N}\omega$
- ◊ Pour $Q \in \mathbb{N}_{\omega}^{m}$, $Q^{-1}(\omega) = \{p \in P \mid Q(p) = \omega\}$

Définition

L'arborescence de couverture, notée AC(N) où $N=(R,M_o)$ est un réseau marqué, est une arborescence (S,X) où :

- ◊ les sommets de S sont étiquetés par des vecteurs de $\mathbb{N}_{\omega}^{m}$ (m = cardinal(P));
- ◊ les arcs de X sont étiquetés par des transitions de T.

Algorithme (Version 1) pour construire un arbre de couverture (selon Rascloz)

AC(N) est construite de la façon suivante :

1. La racine « r » est étiqueté par M_o.
2. Un sommet « s » étiqueté par $Q \in \mathbb{N}_{\omega}^{m}$ n'a pas de successeur si et seulement si :
   - ◊ soit il existe sur le chemin de « r » à « s » un sommet « s' » étiqueté également par Q;

◊ soit il n'existe pas de transition « t » telle que Pré(_, t) ⊆ Q.

3. Si le sommet « s » étiqueté par Q ne vérifie pas les conditions de (2), alors pour toute transition « t » telle que Pré(_,t) ⊆ Q, il existe un sommet « s' » successeur de « s ». L'arc (s,s') est étiqueté par « t », le somme « s' » est étiqueté par Q', où Q' est défini comme suit :
   ◊ S'il existe sur le chemin de « r » à « s' » un sommet « s" » étiqueté par Q" avec Q" ⊆ Q + C(_,t), alors pour tout « p » telle que Q"(p) < Q(p) + C(p,t), on a Q'(p)=ω.
   ◊ Dans le cas contraire, Q'(p) = Q(p) + C(p,t)

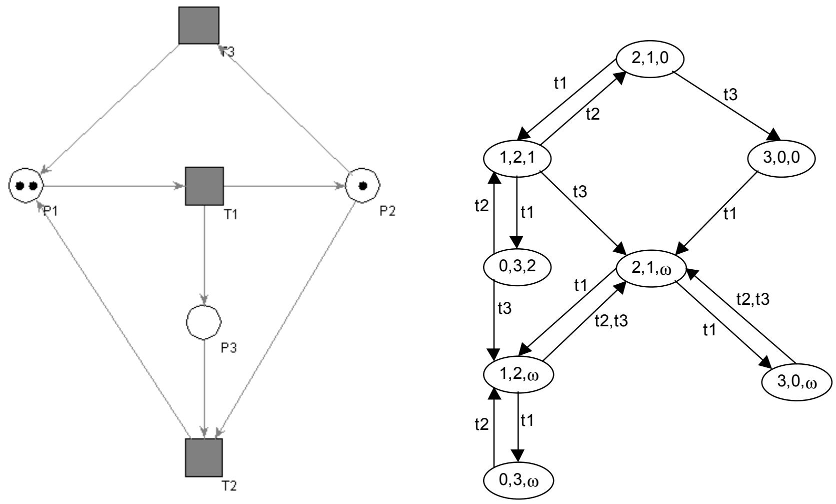
Algorithme de Karp et Miller (Version 2) (d'après Diaz)

Chaque sommet de l'arbre de couverture est étiqueté par un ω-marquage et chaque arc est étiqueté par une transition; AC(R,M_o) est initialisé avec une racine « r » étiquetée par Mo. On conserve dans « ATRAITER » (initialisé avec « r ») un sous-ensemble des feuilles de l'arbre courant qu'il faut encore examiner.

Tant que ATRAITER est non vide **faire**
    Extraire « q » étiqueté par M de ATRAITER
    Pour chaque transition « t » sensibilisée en M **faire**
        Créer « q_t » fils de « q »
        Étiqueter l'arc reliant « q » à « q_t » avec « t »
        $M_t := M + C(t)$
        $M^{\omega}_t := M_t$
        Pour chaque place « p » ∈ P **faire**
            Si « q_t » admet un ancêtre « a » étiqueté par M_o
            avec $M_a \leqslant M_t$ et $M_a(p) < M_t(p)$ Alors
                $M^{\omega}_t(p) := \omega$
            Fin Si
        Fin Pour
        Étiqueter « q_t » avec M^{ω}_t
        Si « q_t » n'admet pas un ancêtre ayant la même étiquette que lui **Alors**
            Insérer « q_t » dans ATRAITER
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Tant Que.

Exemple 20

Construisez le graphe de couverture du RdP suivant. Notez bien en construisant le graphe, pour le nœud suivant le marquage (1,2,1) suivi du tir de « t3 », le marquage résultant (2,1,1) devient (2,1,ω) puisqu'un marquage précédent, soit (2,1,0) $\subseteq$ (2,1,1)



3.2 Graphe de couverture

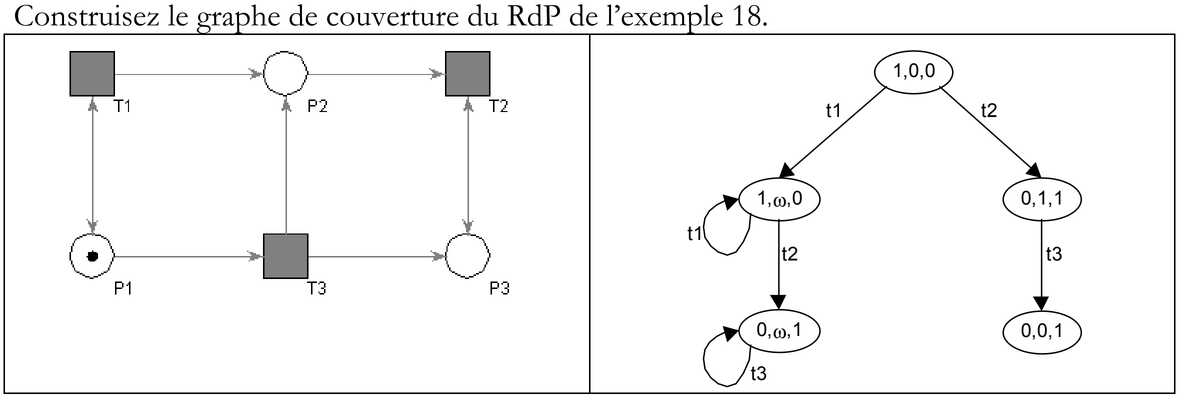
Le graphe de couverture, noté GC(N), est obtenu de l'arborescence de couverture en fusionnant les sommets étiquetés par les mêmes éléments (vecteurs) et redirigeant les arcs entre les sommets ainsi obtenus.

Propriétés

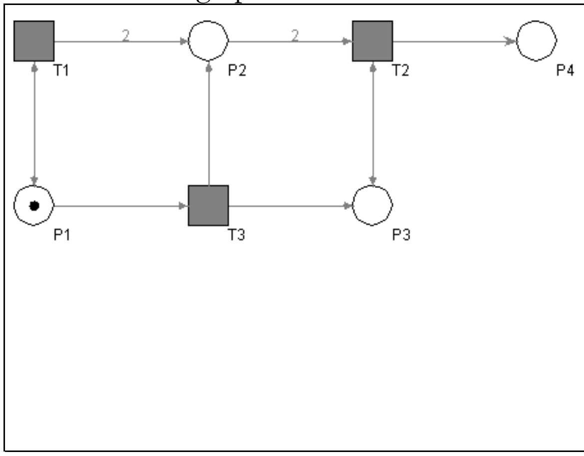
- ◊ Il est toujours possible de construire le graphe de couverture, celui-ci est fini.
- ◊ Si « s » est une séquence de franchissement telle que $M_o[s\rangle M$ alors il existe un chemin dans GC(N) partant de M_o conduisant à un sommet Q tel que : $\forall p \in P$, $M(p) \leqslant Q(p)$

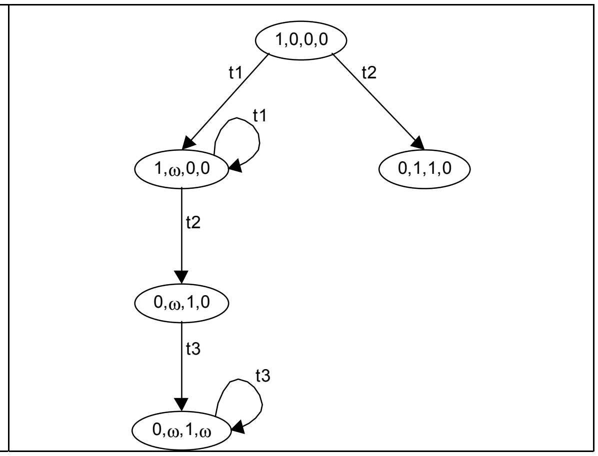
Exemple 21

Construisez le graphe de couverture du RdP de l'exemple 18.



Exemple 22
Construisez le graphe de couverture du RdP suivant :





3.3 Propriétés et graphes de couverture

A Décider si un réseau est borné grâce à son graphe de couverture

Un réseau marqué N est non-borné si et seulement si il existe un sommet Q de GC(N) tel que $Q^{-1}(\omega) \neq \emptyset$.

Une place « p » d'un réseau marqué N est non-bornée si il existe un sommet Q de GC(N) tel que $Q(p) = \omega$.

Si un réseau marqué N est borné, le graphe de couverture et le graphe des marquages sont identiques.

B Limitation du graphe de couverture

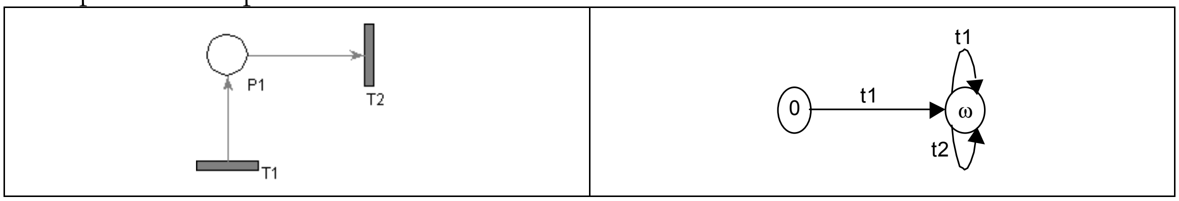
Notons que le symbole ω correspond à une perte d'information. D'une manière générale, ce graphe ne permet pas de répondre à des questions concernant :

- ◊ l'accessibilité d'un marquage;
- ◊ la vivacité du réseau.

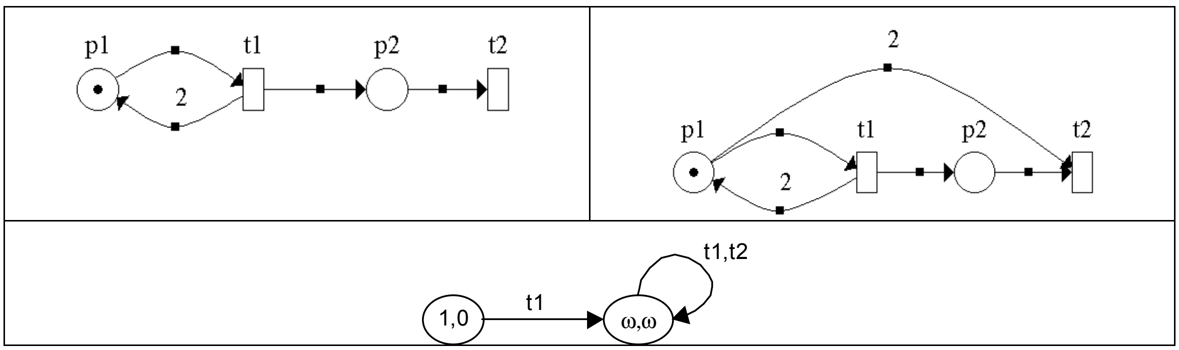
mais dans certains cas oui…

Le graphe de couverture peut tout de même être utile entre autre pour déterminer le caractère borné d'un réseau mais pensons également à la situation où nous aimerions déterminer si deux places sont toujours en exclusion mutuelle. Il suffit d'examiner le graphe…

Exemple 24
Exemple d'une perte d'information dans un graphe de couverture. La séquence $t_1t_2t_2$ étiquette bien un chemin du graphe de couverture partant de M_o et pourtant la séquence n'est pas tirable depuis Mo.



Exemple 25
Deux graphes de couverture identiques mais le comportement des réseaux est nettement différent.



C Analyser l'accessibilité d'un marquage

Dans le cas d'un réseau borné, un marquage M est accessible si et seulement si le graphe des marquages accessibles contient un nœud représentant M.
Dans le cas d'un réseau non-borné, il est impossible de vérifier à l'aide d'un graphe de couverture si M est accessible. On peut « seulement » vérifier qu'il existe un marquage M' tel que $M \subseteq M'$.

D Analyser la vivacité d'un réseau

- **Rappels en théorie des graphes**

La **composante fortement connexe** d'un graphe est un sous-graphe tel qu'il existe un chemin (orienté) entre tout point A et tout point B de ce sous-graphe.

Un **arc sortant** d'une composante fortement connexe est un arc qui a comme sommet d'origine un sommet de cette composante et comme extrémité un sommet qui n'appartient pas à cette composante.

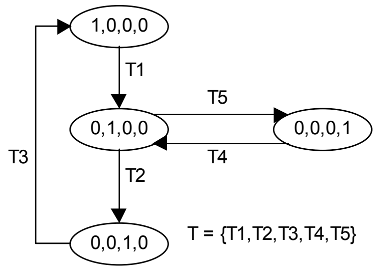
- **Réseau borné et vivacité**

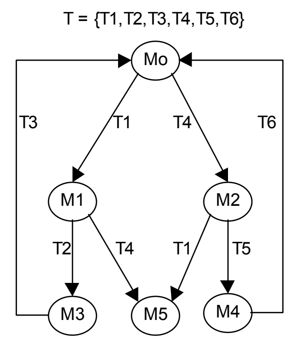
Une **transition** « t » d'un RdP borné est **vivante** si et seulement si, partant d'un nœud quelconque du graphe des marquages accessibles, il existe un chemin orienté contenant un arc marqué « t ». La transition « t » est vivante si et seulement si chaque composante fortement connexe et sans arc sortant du graphe contient un arc marqué « t ».

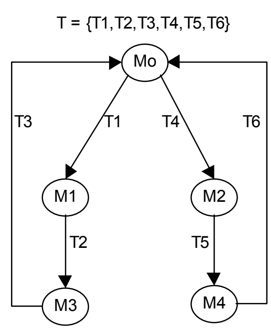
Un **RdP** borné est **vivant** si et seulement si chaque composante fortement connexe du graphe qui n'a pas d'arc sortant contient au moins un arc marqué par chaque transition.

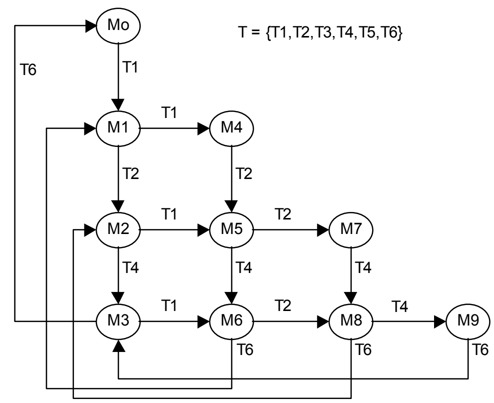
Un **RdP** borné est **sans blocage** si et seulement si chaque nœud de son graphe est l'origine d'au moins un arc.

Exemple 26
Que peut-on dire à propos des graphes suivants :

<table>
<tr>
<td>


Réseau vivant et borné.
</td>
<td>


Réseau quasi vivant mais contenant un bloquage.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Réseau vivant.
</td>
<td>


Réseau non vivant (il manque la transition T3). Le réseau n'est pas quasi vivant. Évidemment, sans la transition T3 dans l'ensemble T, on aurait un réseau tout ce qu'il y a de vivant!
</td>
</tr>
</table>

- **Réseau non borné et vivacité**

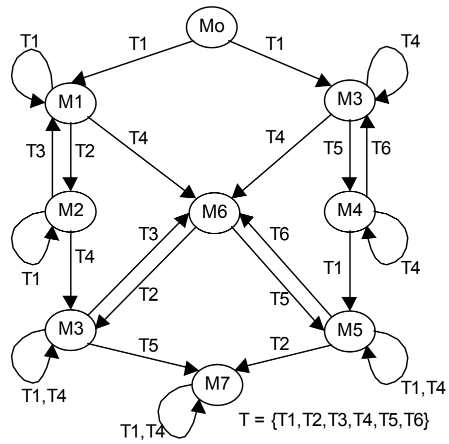
Une **transition** « t » d'un RdP non bornée **n'est pas vivante** si le graphe de couverture possède une composante fortement connexe sans arc sortant dans laquelle aucun arc n'est marqué « t ».

Un **RdP** non borné **n'est pas vivant** si son graphe de couverture possède au moins une composante fortement connexe du graphe sans arc sortant et dont l'union des transitions attachées aux arcs n'est pas l'ensemble des transitions.

Un **RdP** non borné est **avec blocage** si son graphe de couverture contient un nœud qui n'est l'origine d'aucun arc.

Exemple 27

Que peut-on dire à propos du graphe suivant? C'est le graphe d'un réseau non vivant.



- **Réseau borné, réversibilité et état d'accueil**

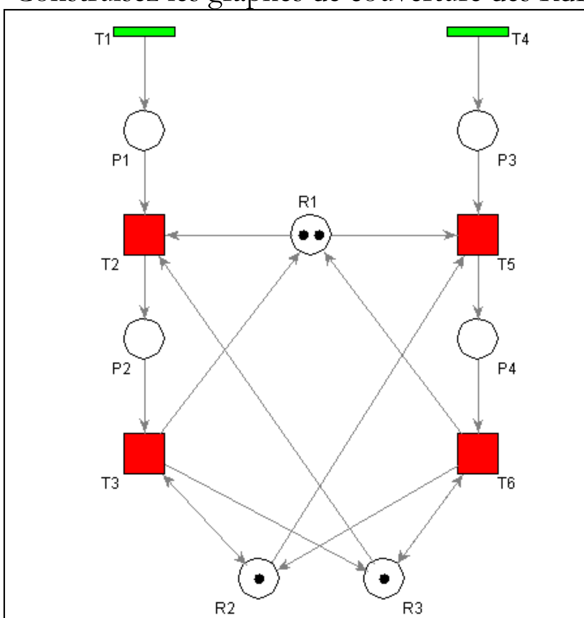
Un RdP borné est **réversible** si et seulement si son graphe des marquages accessibles est fortement connexe.

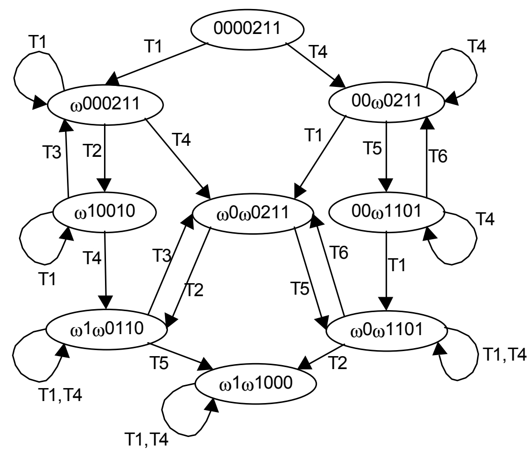
Un RdP borné accepte un état d'accueil si et seulement si son graphes des marquages accessibles possède une et une seule composante fortement connexe sans arc sortant. De plus, l'ensemble des marquages figurant dans cette composante donne l'ensemble des états d'accueil.

Si un RdP possède un état d'accueil, son graphe de couverture possède une et une seule composante fortement connexe sans arc sortant. Si de plus il est réversible, il existe un marquage M' de cette composante tel que $M'(p) = M_o(p)$ ou $M'(p) = \omega\ \forall p \in P$.

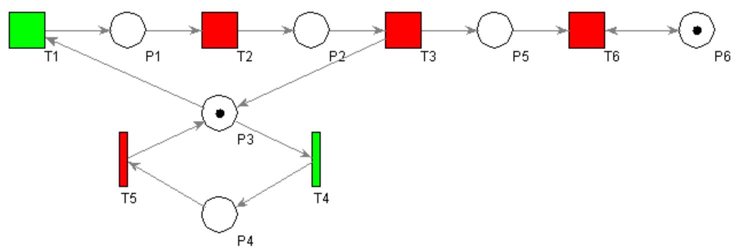
Exemple 28

Construisez les graphes de couverture des RdP suivants. Que peut-on déduire?

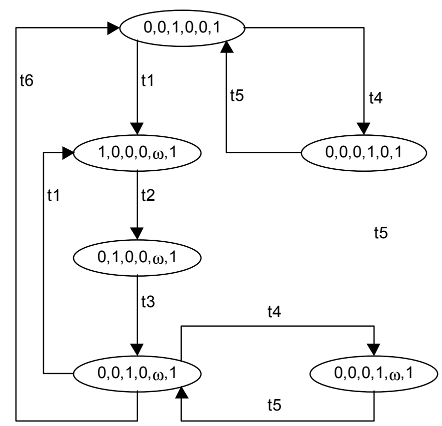




Il s'agit du graphe de l'exemple 27! Réseau non borné et non vivant.



Réseau non borné.



4 Propriétés structurelles et analyse par algèbre linéaire

Les techniques d'analyse présentées ici se basent sur l'équation fondamentale du franchissement que nous avons vue au début de ce thème. L'analyse par algèbre linéaire permet d'étudier des propriétés d'un réseau (caractère borné, vivacité) indépendamment d'un marquage initial. De ce fait, on parlera de propriétés structurelles du réseau. Par exemple, on pourra dire qu'un réseau est **structurellement borné** s'il est borné pour tout marquage initial fini. De la même façon, si pour tout marquage initial, le réseau est vivant, on dira que le réseau est structurellement vivant.

A Préliminaires

L'équation fondamentale du franchissement (ou équation fondamentale de changement d'états) s'interprète comme suit : l'effet d'une séquence de franchissement est entièrement déterminé par la matrice d'indidence et par le vecteur des occurrences (vecteur caractéristique) de transitions dans la séquence (c'est-à-dire du nombre de franchissements de chaque transition dans la séquence).

Nous cherchons ici à mettre en évidence des quantités invariantes à l'aide de cette équation.

Flots d'un réseau

Les différents annulateurs que nous considérons sont (note : les $\overline{0}$ doivent être interprétés comme des vecteurs nuls. v^T est le vecteur transposé de « v »):

- Un P-flot est un vecteur non nul « v » de $\mathbb{Z}^P$ qui vérifie $v^T . C = \overline{0}$
- Un P-semiflot est un vecteur non nul « v » de $\mathbb{N}^P$ qui vérifie $v^T . C = \overline{0}$
- Un T-flot est un vecteur non nul « v » de $\mathbb{Z}^T$ qui vérifie $C . v = \overline{0}$
- Un T-semiflot est un vecteur non nul « v » de $\mathbb{N}^T$ qui vérifie $C. v = \overline{0}$

Un P-flot (respectivement, un P-semiflot) est une somme pondérée de places à coefficients entiers (respectivement, naturels). Un P-flot peut donc servir à obtenir une valeur entière, à partir d'un marquage quelconque, en pondérant les marquages de chaque place et en les sommant. Un T-semiflot peut s'interpréter comme le vecteur d'occurrences d'une séquence de transitions, tandis qu'un T-flot peut s'interpréter comme la différence de deux vecteurs d'occurrences.

Réseaux conservatifs et réseaux consistants

Soit R un RdP :

- ◊ R est **conservatif** SSI il existe un **P-semiflot** v tel que $||v|| = P$ (ou dit autrement, il existe un vecteur non nul « v » de $\mathbb{N}^P$ qui vérifie $v^T . C = \overline{0}$).
- ◊ R est **consistant** SSI il existe un **T-semiflot** v tel que $||v|| - T$ (ou dit autrement, il existe un vecteur non nul « v » de $\mathbb{N}^T$ qui vérifie $C. v = \overline{0}$),
- ◊ R est **structurellement borné** SSI il existe il existe un vecteur non nul « v » de $\mathbb{N}^P$ qui vérifie $v^T . C \leqslant \overline{0}$ (voir « conservatif »).
- ◊ R est **répétitif** SSI il existe un vecteur non nul « v » de $\mathbb{N}^T$ qui vérifie $C. v \geqslant \overline{0}$ (voir « consistant »).

Il en découle que :

- ◊ Si R est conservatif alors R est structurellement borné.
- ◊ Si R est consistant alors R est répétitif.

Liens entre les propriétés structurelles et comportementales

- ◊ Si R est borné et vivant alors R est consistant.
- ◊ Si R est structurellement borné et structurellement vivant alors il est consistant et conservatif.
- ◊ Si R est vivant alors il est répétitif. Si de plus il possède des états d'accueil alors il est consistant.

4.2 Calcul de flots

Un P-semiflot (ou P-invariant) est une solution à coefficients entiers de l'équation :

$$v^T . C = \overline{0}$$

La propriété essentielle d'un semiflot est donc que le compte pondéré des jetons associé à ce semiflot est constant quelque soit l'évolution du réseau marqué.

Un T-semiflot (ou T-invariant) est le dual du P-semiflot. C'est une solution à coefficients entiers de l'équation :

$$C. v = \overline{0}$$

La propriété essentielle d'un T-semiflot est donc que si le marquage initial permet le franchissement d'une séquence de transitions « s » telle que $\overline{s} = v$ alors on revient au marquage initial.

Si dans l'ensemble des T-semiflots une composante est nulle alors il est impossible de revenir au marquage initial en tirant cette transition. Notons également qu'une séquence de transitions correspondant à un T-semiflot n'est pas nécessairement franchissable. Finalement, si s1, s2, …, sn sont des séquences de transitions correspondant à des T-semiflots alors en activant ces séquences (de 0 à plusieurs fois) on retrouve le marquage initial (une propriété très importante dans certains systèmes).

Algorithme d'élimination de Gauβ

On procède transition par transition. L'algorithme s'applique sur la matrice d'incidence C du réseau. Pour la suite, lorsqu'on parlera d'un flot « v », on parle d'une ligne de la matrice d'incidence. Lorsqu'on parlera d'une famille de flots, on parle d'un ensemble de lignes dans la matrice d'incidence. L'algorithme démarre avec une famille de flots restreinte aux k premières transitions et construit une nouvelle famille pour la matrice restreinte aux k+1 premières transitions.

Initialement, k = 0. Soit « t » la prochaine transition à examiner et {v1, … vn} la famille courante. Deux cas peuvent se produire :

- ◊ Cas N° 1 : $\forall v_i$, on a $v_i^t \cdot C(t) = 0$. Dans ce cas, la famille de flots reste inchangée.
- ◊ Cas N° 2 : $\exists v_{io}$ tel que $v_{io}^t \cdot C(t) \neq 0$. Dans ce cas, le flot v_{io} va nous servir de pivot pour constituer la nouvelle famille $\{v'_i\}_{i \neq io}$

$$v'_i = (v_{io}^t \cdot C(t) \cdot v_i - (v_i^t \cdot C(t)) \cdot v_{io}$$

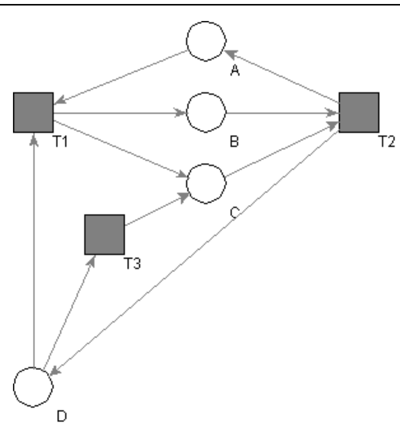
Ainsi, à chaque élimination de transition, soit la famille génératrice est conservée, soit son cardinal est décrémenté d'une unité. Dans la pratique, la matrice C est transformée, à chaque itération, pour représenter la matrice des incidences de la famille de flots courante sur les transitions qui restent à examiner.

Série d'exemples

La meilleure façon de comprendre cet algorithme est de l'effectuer sur quelques exemples. Dans tous les cas, refaites les exemples à la main et comparer avec les résultats offerts par DanaMicS.

Exemple 29

Quelle transition pose un problème dans ce réseau? Étant donné un marquage quelconque, le réseau est-il vivant?



Le réseau n'est pas couvert par les T-invariants (t1 n'est pas couvert). Le seul T-invariant est :

`[1,1,0]`

Le réseau est couvert par les P-invariants. Ceux-ci sont :

$[1,1,0,0]^T$ et $[0,0,1,1]^T$

Les équations sont :

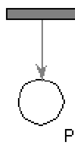
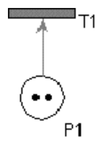
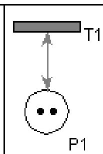
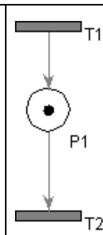
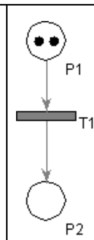
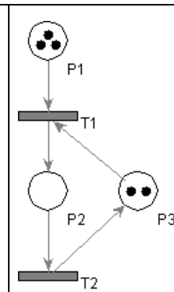
`A + B = 0 et C + D = 0`

La matrice d'incidence est :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

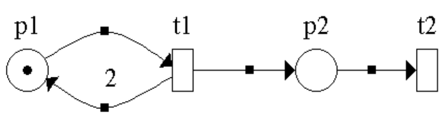
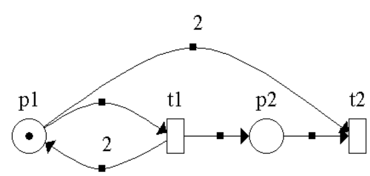
Exemple 30

Les réseaux suivants sont-ils conservatifs?

					
Pas de P ni de T invariants. C = [1]	Pas de P ni de T invariants C = [-1]	P invariant : [1] T invariant : [1] C = [0]	Pas de P invariant. T invariant : [1 1] C = [1 –1]	P invariant : $[1\ 1]^T$ Pas de T invariant. $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	P invariant : $[0\ 1\ 1]^T$ p1 non couvert Pas de T invariant : $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

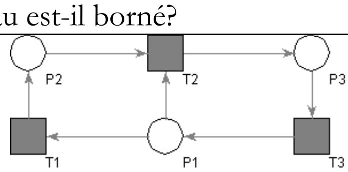
Exemple 31

Les RdP suivants sont-ils bornés, consistants, conservatifs, répétitifs?

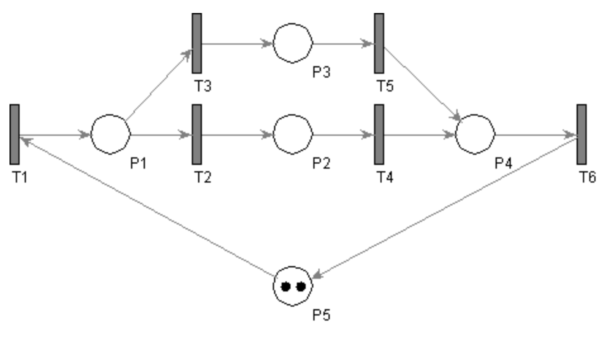
	
Pas de P ni de T invariant. $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	Pas de P ni de T invariant. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exemple 32

Le réseau est-il borné?

	Pas de P ni de T invariant. $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exemple 33



Couvert par P-invariant :

$[1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$

Couvert par T-invariant :

`[1 1 0 1 0 1] et [1 0 1 0 1 1]`

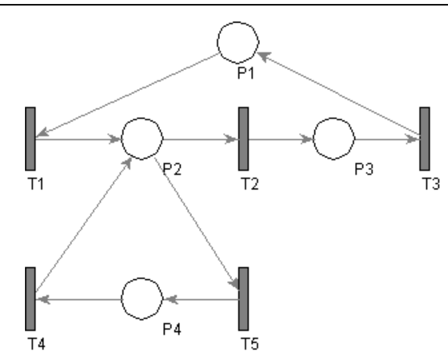
Équation :

`p1 + p2 + p3 + p4 + p5 = 0`

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 34

Quels sont les semiflots?



Couvert par P-invariant :

$[1\ 1\ 1\ 1]^T$

Couvert par T-invariant :

`[1 1 1 0 0] et [0 0 0 1 1]`

Équation :

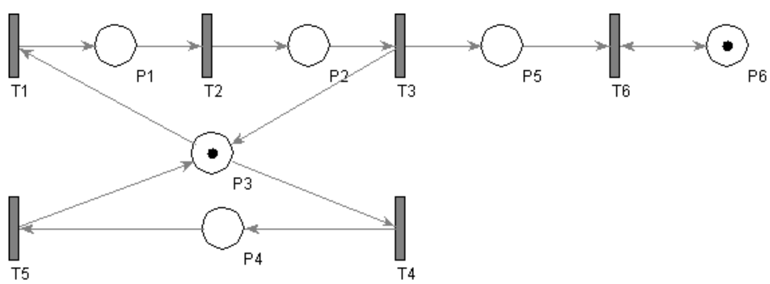
`p1 + p2 + p3 + p4 = 0`

Matrice d’incidence :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 35

Calculez les semiflots. Quelles sont les places bornées. Y a-t-il une borne supérieure du nombre de jetons dans ces places?



Le réseau est couvert par T invariants. Le réseau n’est pas couvert par P invariants. p2 et p5 ne sont pas couverts.

P invariants :

$[1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$ et $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$

T invariants :

`[0 0 1 1 0] et [1 1 1 0 1]`

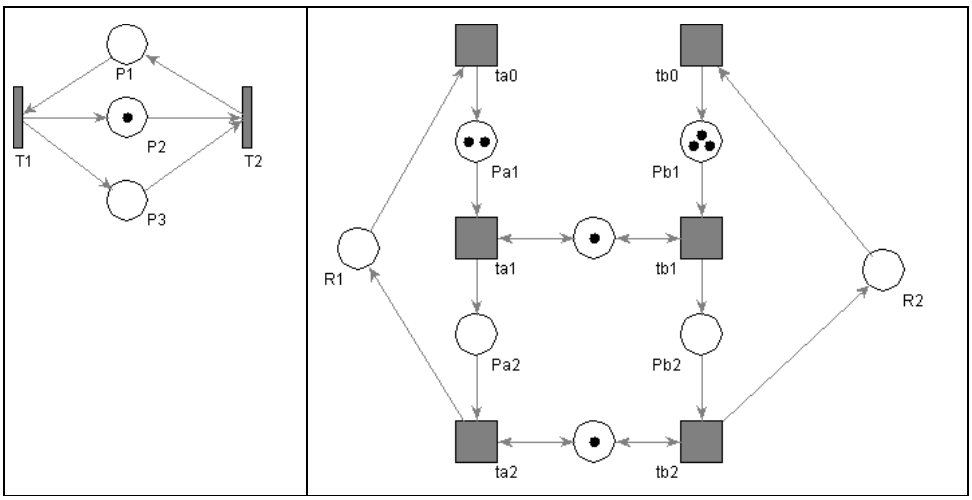
Équations :

```
p1 + p3 + p4 = 0
     p6 = 0
```

Matrice d'indidence

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 36
Calculez les T-semiflots des réseaux suivants :



Pour le premier réseau :

Couvert par P et T invariants.

P invariant = $[1\ 1\ 0]^T$ et $[1\ 0\ 1]^T$ et T invariant = [1 1]

Équations : p1 + p2 = 0 et p1 + p3 = 0

Matrice d'incidence : $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Pour le second réseau :

Couvert par P et T invariants.

P invariants (A et B sont les deux places centrales, A est celle du haut et B celle du bas) :

$$\begin{array}{l} [\text{Pa1 Pa2 Pb1 Pb2 R1 R2 A B}]^T \\ [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T \\ [0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T \\ [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T \\ [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T \end{array}$$

T invariants

```
[ta0 ta1 ta2 tb0 tb1 tb2]
[ 1   1   1   0   0   0]
[ 0   0   0   1   1   1]
```

Équations :

```
Pa1 + Pa2 + R1 = 0
Pb1 + Pb2 + R2 = 0
      A = 0
      B = 0
```

Matrice d'incidence (ordre des places : Pa1; Pa2; Pb1; Pb2; R1; R2; A; B; ordre des transitions : ta0; ta1; ta2; tb0; tb1; tb2) :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$