AULA

54

Calculando probabilidades

Introdução

Você já aprendeu que a probabilidade de um evento E é:

$$P(E) = \frac{n^{o} \text{ de resultados favoráveis}}{n^{o} \text{ total de resultados possíveis}}$$

Nesta aula você aprenderá a calcular a probabilidade de ocorrência de um evento ***e*** outro, bem como a ocorrência de um ***ou*** outro evento. Em muitas situações a ocorrência de um fato qualquer depende da ocorrência de um outro fato; nesse caso dizemos que são ocorrências dependentes. Em situações onde não há essa dependência, precisamos calcular probabilidades de duas situações ocorrerem ao mesmo tempo.

Para abordarmos situações como as que acabamos de descrever, utilizaremos vários exemplos durante esta aula. Leia-os com bastante atenção e procure refazer as soluções apresentadas.

Nossa aula

Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento e de outro

EXEMPLO 1

Num grupo de jovens estudantes a probabilidade de que um jovem, escolhido ao acaso, tenha média acima de 7,0 é $\frac{1}{5}$. Nesse mesmo grupo, a probabilidade de que um jovem saiba jogar futebol é $\frac{5}{6}$. Qual a probabilidade de escolhermos um jovem (ao acaso) que tenha média maior que 7,0 e saiba jogar futebol?

Solução:

O fato de ter média maior que 7,0 não depende do fato de saber jogar futebol, e vice-versa. Quando isso ocorre, dizemos que os eventos são independentes. Considere então os eventos:

A: ter média acima de 7,0.

B: saber jogar futebol.

A e B: ter média acima de 7,0 ***e*** saber jogar futebol.

Como queremos calcular P (A e B), pense o seguinte: de todos os jovens, $\frac{1}{5}$ têm média acima de 7,0 e $\frac{5}{6}$ sabem jogar futebol. Ora, $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$, sabem jogar futebol e têm média acima de 7,0. Portanto, P (A e B) = $\mathbf{\frac{1}{6}}$.

Repare que para encontrarmos P (A e B) efetuamos P (A) · P (B). Então, concluímos que, quando A e B são eventos independentes (não têm "nada a ver" um com o outro):

$$\boxed{P\ (A \text{ e } B) = P\ (A) \cdot P\ (B)}$$

EXEMPLO 2

Dos 30 funcionários de uma empresa, 10 são canhotos e 25 vão de ônibus para o trabalho. Escolhendo ao acaso um desses empregados, qual a probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho?

Solução:

Considere os eventos:

A : ser canhoto

B : ir de ônibus para o trabalho

É claro que A e B são eventos independentes, portanto um não depende em nada do outro. A probabilidade de os dois eventos (A e B) ocorrerem simultaneamente é calculada por P (A e B) = P (A) · P (B).

Calculando:

$$P\ (A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P\ (B) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$P\ (A \text{ e } B) = P\ (A) \cdot P\ (B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

A probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho é de $\mathbf{\frac{5}{18}}$.

EXEMPLO 3

Alguns atletas participam de um triathlon (prova formada por 3 etapas consecutivas: natação, corrida e ciclismo). A probabilidade de que um atleta escolhido ao acaso termine a primeira etapa (natação) é $\frac{4}{7}$. Para continuar na competição com a segunda etapa (corrida) o atleta precisa ter terminado a natação. Dos atletas que terminam a primeira etapa, a probabilidade de que um deles, escolhido ao acaso, termine a segunda é $\frac{3}{4}$. Qual a probabilidade de que um atleta que iniciou a prova, e seja escolhido ao acaso, termine a primeira e a segunda etapas?

Solução:

A : terminar a 1ª etapa da prova (natação).

B : terminar a 2ª etapa da prova (corrida), tendo terminado a 1ª.

Note que A e B não são eventos independentes pois, para começar a 2ª etapa é necessário, antes, terminar a 1ª.

Nesse caso dizemos que a ocorrência do evento B depende (está condicionada) à ocorrência do evento A.

Utilizamos então a notação B/A, que significa a dependência dos eventos, ou melhor, que o evento B/A denota a ocorrência do evento B, sabendo que A já ocorreu. No caso deste exemplo, temos: B/A terminar a 2ª etapa (corrida), sabendo que o atleta terminou a 1ª etapa (natação).

E agora? Como calcular P (A e B)?

É simples: no lugar de usarmos P(B) na fórmula P(A e B) = P(A) · P(B), usaremos P(B/A) já que a ocorrência de B depende da ocorrência de A.

O enunciado deste problema nos diz que $P(A) = \frac{4}{7}$ e $P(B/A) = \frac{3}{4}$; assim,

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{7}$$

A probabilidade de que um atleta, escolhido ao acaso, termine a 1ª e a 2ª etapas é $\frac{3}{7}$.

Quando A e B ***não*** são eventos ***independentes*** a probabilidade de ocorrência de A e B é calculada por:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

onde P (B/A) é a probabilidade de B, dado que A já ocorreu.

EXEMPLO 4

No exame para tirar a carteira de motorista, a probabilidade de aprovação na prova escrita é $\frac{9}{10}$. Depois de ser aprovado na parte teórica, há uma prova prática de direção. Para os que já passaram no exame escrito, a probabilidade de passar nessa prova prática é $\frac{2}{3}$.

Qual a probabilidade de que, escolhido um candidato ao acaso, ele seja aprovado em ambas as provas escrita e prática e tire a carteira de motorista?

Solução:

Considere os eventos:

A: aprovação na prova escrita.

B: aprovação na prova prática de direção.

Os eventos A e B não são independentes, pois é preciso ter aprovação na prova escrita e para fazer a prova prática de direção. Como a ocorrência de B está condicionada à ocorrência de A, criamos o evento:

B/A: ter aprovação na prova prática de direção, sabendo que o candidato foi aprovado na prova escrita.

Para calcular P(A e B), usamos: P(A e B) = P(A) · P(B/A)

Calculando:

$P(A) = \frac{9}{10}$ $\qquad$ $P(B/A) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(A \text{ e } B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

A probabilidade de passar na prova escrita e na prova de direção é $\frac{3}{5}$.

Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou outro

EXEMPLO 5

Na Copa América de 1995, o Brasil jogou com a Colômbia. No primeiro tempo, a seleção brasileira cometeu 10 faltas, sendo que 3 foram cometidas por Leonardo e outras 3 por André Cruz. No intervalo, os melhores lances foram reprisados, dentre os quais uma falta cometida pelo Brasil, escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de que a falta escolhida seja de Leonardo ou de André Cruz?

Solução:

Das 10 faltas, 3 foram de Leonardo e 3 de André Cruz. Portanto, os dois juntos cometeram 6 das 10 faltas do Brasil. Assim, a probabilidade de que uma das faltas seja a escolhida dentre as 10 é $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Também podemos resolver este problema da seguinte maneira:

- probabilidade de ser escolhida uma falta do Leonardo = $\frac{3}{10}$.
- probabilidade de ser escolhida uma falta do André Cruz = $\frac{3}{10}$.
- probabilidade de ser escolhida uma falta de um destes dois jogadores $= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Lembre-se de que qualquer uma das duas escolhas terá um resultado favorável. Se A e B são os eventos (escolher uma falta de Leonardo **ou** escolher uma falta de André Cruz), estamos interessados na probabilidade do evento A ou B.

Temos então:

P(A ou B) = P(A) + P(B)

Note que isso vale porque uma falta não pode ser cometida pelos dois jogadores ao mesmo tempo, ou seja, o evento A ***e*** B é impossível.

EXEMPLO 6

Uma empresa que fabrica suco de laranja fez uma pesquisa para saber como está a preferência do consumidor em relação ao seu suco e ao fabricado por seu principal concorrente. Essa empresa é chamada SOSUMO, e seu concorrente SUMOBOM. A pesquisa concluiu que dos 500 entrevistados, 300 preferiam o SUMOBOM, 100 consumiam os dois, 250 preferiam SOSUMO e 50 nenhum dos dois. Um dos entrevistados foi escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de que ele seja:

a) consumidor de SOSUMO ***e*** SUMOBOM;

b) consumidor de SOSUMO ***ou*** SUMOBOM.

Solução:

a) De acordo com a pesquisa dos 500 entrevistados, 100 consomem os dois sucos. Logo, a probabilidade de que um entrevistado, escolhido ao acaso, consuma os dois sucos é: $\frac{100}{500} = \frac{1}{5}$.

b) Usando o raciocínio do Exemplo 5, para saber a probabilidade da ocorrência de um evento ***ou*** outro, somamos as probabilidades de os dois eventos ocorrerem separadamente. Mas, neste exemplo, devemos tomar cuidado com o seguinte: existem pessoas que consomem os dois sucos indiferentemente, compram o que estiver mais barato, por exemplo. Assim, não podemos contar essas pessoas (que consomem um ***e*** outro) duas vezes. Observe que a soma dos resultados é maior que o número de entrevistados (300 + 100 + 200 + 50 = 650), ou seja, há pessoas que, apesar de preferirem um dos sucos, consomem os dois. Para facilitar daremos nomes aos eventos:

A : preferir o SOSUMO

B: preferir o SUMOBOM

A e B: consumir SOSUMO ***e*** SUMOBOM

A ou B: consumir SOSUMO ***ou*** SUMOBOM

Repare que este ***ou*** quer dizer: apenas o SOSUMO ***ou*** apenas o SUMOBOM.

Fazendo P(A ou B) = P(A) + P(B) estamos contando duas vezes as pessoas que apesar de preferirem um dos sucos, consomem os dois. Logo, devemos subtrair de P(A) + P(B) o resultado de P(A e B) para retirar a "contagem dobrada". Temos então:

$$\boxed{P\ (A \text{ ou } B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \text{ e } B)}$$

Calculando:

$$P(A) = \frac{250}{500} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5} \qquad P(A \text{ e } B) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \text{ ou } B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$$

A probabilidade de que o escolhido consuma um suco ou outro é $\frac{9}{10}$.

Observação

Em exemplos como o que acabamos de ver há outras soluções possíveis. Observe que o evento A ou B (consumir um suco ou outro) deve incluir como casos favoráveis todas as pessoas que ***não*** fazem parte do grupo dos que ***não consomem esses dois sucos***.

Sabíamos que dos 500 entrevistados, 50 pessoas consumiam ***nenhum dos dois*** e a probabilidade de escolhermos uma dessas pessoas ao acaso era $\frac{50}{500}$, ou seja, $\frac{1}{10}$. Assim, podíamos concluir que a probabilidade de ***não fazer parte desse*** grupo era $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, raciocinando por exclusão.

Uma representação gráfica

Nesses tipos de problema, geralmente usamos uma representação gráfica para visualizar melhor o enunciado.

Representamos todos os entrevistados (todos os casos possíveis) por um retângulo e os eventos por círculos dentro deste retângulo, como na seguinte figura:

A parte comum dos dois círculos corresponde ao evento (A e B). No exemplo anterior, 100 pessoas consumiam os dois sucos e a representação seria assim:

Como 300 consumidores preferiam SUMOBOM (evento B), 250 o SOSUMO (evento A) e já temos 100 pessoas contadas para cada um dos eventos, devemos completar o gráfico da seguinte maneira:

Os 50 que ficariam fora dos dois círculos seriam aqueles que não consomem esses sucos. Observe que 150 + 100 + 200 + 50 é igual a 500, que é o número total de entrevistados. Agora observe o cálculo de P(A e B) e P(A ou B):

$$\text{P(A e B)} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} \qquad \text{P(A ou B)} = \frac{150+100+200}{500} = \frac{450}{500} = \frac{9}{10}$$

$$\text{e P (não (A ou B))} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10} \quad \text{ou P (não (A ou B))} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

EXEMPLO 7

Em uma sala do Telecurso 2000, 12 alunos gostam de vôlei, 13 gostam de futebol, 5 gostam dos dois esportes e outros 10 não gostam nem de vôlei nem de futebol. Sabendo que a turma tem 30 alunos, qual a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso, goste de vôlei ***ou*** de futebol?

Solução:

Considere os eventos

A: gostar de futebol

B: gostar de vôlei

Vamos representá-los graficamente.

Como o total de alunos é 30, temos $\text{P(A ou B)} = \frac{7+5+8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

ou ainda P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A e B) =

$$\frac{12}{30} + \frac{13}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Resolvendo por exclusão, teríamos:

$$\text{P(A ou B)} = 1 - \text{P(não (A ou B))} = 1 - \frac{10}{30} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Agora, resolva os exercícios propostos.

Exercício 1

Em uma cidade do interior do Brasil, a probabilidade de que um habitante escolhido ao acaso tenha televisão em casa é $\frac{11}{12}$. Já a probabilidade de esse habitante ser um comerciante é $\frac{1}{11}$. Escolhendo um habitante dessa cidade ao acaso, qual a probabilidade de que ele tenha televisão em casa e seja comerciante?

Exercício 2

Alguns professores estão prestando concurso para dar aulas em uma escola. Inicialmente, eles farão uma prova escrita e, depois de serem aprovados nessa prova, farão uma prova prática. Aquele que for aprovado na prova prática será contratado. Sabendo que a probabilidade de aprovação na prova escrita é $\frac{1}{4}$ e de aprovação na prova prática (depois de ser aprovado na escrita) é $\frac{2}{3}$, calcule a probabilidade de que um professor, escolhido ao acaso, seja contratado.

Exercício 3

Em uma noite de sexta-feira, pesquisadores percorreram 500 casas perguntando em que canal estava ligada a televisão. Desse modo, descobriram que em 300 casas assistiam ao canal VER-DE-PERTO, 100 viam o canal VER-MELHOR e outras 100 casas não estavam com a TV ligada. Escolhida uma das 500 casas, ao acaso, qual a probabilidade de que a TV esteja sintonizada no canal VER-DE-PERTO ou no canal VER-MELHOR?

Exercício 4

Dos 140 funcionários de uma fábrica, 70 preferem a marca de cigarros FUMAÇA, 80 preferem TOBACO e 30 fumam ambas sem preferência. Sabendo que 20 funcionários não fumam, calcule a probabilidade de que um funcionário, escolhido ao acaso:

a) fume FUMAÇA ***e*** TOBACO

b) fume FUMAÇA ***ou*** TOBACO

Exercício 5

Com as mesmas informações do exercício anterior, calcule a probabilidade de que um funcionário, escolhido ao acaso:

a) fume ***só*** FUMAÇA

b) fume ***só*** TOBACO

c) fume ***só*** FUMAÇA ou ***só*** TOBACO

d) não fume nenhuma das duas marcas de cigarro

e) não fume FUMAÇA

f) não fume TOBACO