Cálculo infinitesimal

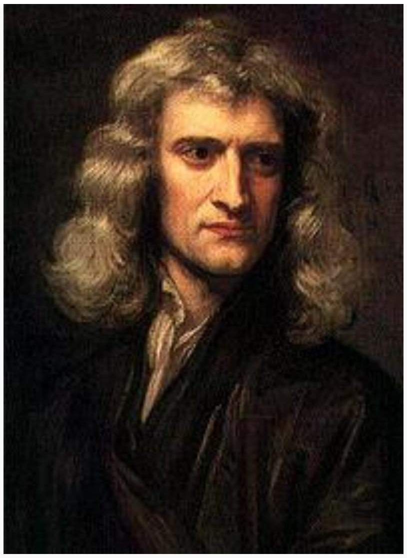
El **cálculo infinitesimal** o **cálculo de infinitesimales** constituye una parte muy importante de la matemática moderna. Es normal en el contexto matemático, por simplificación, simplemente llamarlo **cálculo**.

El cálculo, como algoritmo desarrollado en el campo de la matemática, incluye el estudio de los límites, derivadas, integrales y series infinitas, y constituye una gran parte de la educación de las universidades modernas. Más concretamente, el cálculo infinitesimal es el estudio del cambio, en la misma manera que la geometría es el estudio del espacio.

El cálculo infinitesimal tiene amplias aplicaciones en la ciencia y la ingeniería y se usa para resolver problemas para los cuales el álgebra por sí sola es insuficiente. Este cálculo se construye con base en el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica e incluye dos campos principales, **cálculo diferencial** y **cálculo integral**, que están relacionados por el teorema fundamental del cálculo. En matemática más avanzada, el cálculo es usualmente llamado análisis y está definido como el estudio de las funciones.

Más generalmente, el cálculo puede referirse a cualquier método o sistema de cuantificación guiado por la manipulación simbólica de las expresiones. Algunos ejemplos de otros cálculos bien conocidos son el cálculo proposicional, el cálculo predicativo, el cálculo relacional y elcálculo lambda.

Historia



Sir Isaac Newton es uno de los más famosos contribuyentes del desarrollo del cálculo, el cual utilizó en sus leyes de movimiento y gravitación.

Edad Antigua

El período antiguo introdujo algunas de las ideas del cálculo integral, pero no parece haber desarrollado estas ideas en una manera rigurosa o sistemática. En el cálculo de áreas y volúmenes, la función básica del cálculo integral puede ser rastreada en el tiempo hasta los papiros matemáticos de Moscúque datan del año 1890 a. C, en los que un egipcio calculó satisfactoriamente el volumen del tronco de una pirámide.[1] [2]

De la escuela de los matemáticos griegos, Eudoxo (408−355 a. C.) usó el método exhaustivo, el cual prefiguraba el concepto de límite, para calcular áreas y volúmenes, mientras que Arquímedes(287−212 a. C.) desarrolló más allá su idea inventando un método heurístico que se asemeja al cálculo infinitesimal.[3]

El método exhaustivo fue más tarde usado en China por Liu Hui en el siglo III a. C. para encontrar el área de un círculo. En el siglo V d. C., Zu Chongzhi usó lo que más tarde sería llamado la *"teoría de los indivisibles"* por el matemático italiano Bonaventura Cavalieri para encontrar el volumen de una esfera.[2]

Edad Medieval

Cerca del año 1000 d. C., el matemático islámico Alhazen fue el primero en derivar la fórmula para la suma de la cuarta potencia de una progresión aritmética, usando un método a partir del cual es fácil encontrar la fórmula para la suma de cualquier potencia integral de mayor orden.[4]

En el siglo XI, el polímata chino Shen Kuo desarrolló ecuaciones que se encargaban de integrar. En el siglo XII, el matemático indio, Bhaskara II, desarrolló una derivada temprana representando el cambio infinitesimal, y describió una forma temprana del "Teorema de Rolle".[5]

También en el siglo XII, el matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descubrió la derivada de la función cúbica, un importante acontecimiento en el cálculo diferencial.[6]

En el siglo XIV, Madhava de Sangamagrama, en conjunto con otros matemáticos y astrónomos de la Escuela de Kerala, describieron casos especiales de las series de Taylor,[7] los cuales están referidos en el texto *Yuktibhasa*.[8] [9] [10]

]Modernidad

En la época moderna, descubrimientos independientes relacionados con el cálculo se estaban llevando a cabo por la matemática japonesa del siglo XVII, gracias al aporte de matemáticos como Seki Kōwa, quien expandió el método exhaustivo.

En Europa, el trabajo fundacional fue un tratado del matemático italiano Bonaventura Cavalieri, quien argumentó que los volúmenes y áreas deberían ser calculados como las sumas de los volúmenes y áreas de delgadas secciones infinitesimales. Estas ideas eran similares a las expuestas en el trabajo "El

Método de los Teoremas Mecánicos" de Arquímedes, el cual estuvo perdido hasta principios del siglo XX. El trabajo de Cavalieri no fue bien respetado ya que sus métodos pueden llevar a resultados erróneos, y porque las cantidades infinitesimales que introdujo eran desacreditadas al principio.

El estudio formal del cálculo combinó los infinitesimales de Cavalieri con el cálculo de diferencias finitas desarrollado en Europa más o menos al mismo tiempo. La combinación fue lograda por John Wallis, Isaac Barrow y James Gregory, probando estos últimos el teorema fundamental del cálculo integral cerca del año 1675.

La regla del producto y la regla de la cadena, la noción de derivada de mayor orden, las series de Taylor, y las funciones analíticas fueron introducidas por Isaac Newton en una notación idiosincrásica que usó para resolver problemas de física matemática. En sus publicaciones, Newton reformuló sus ideas para acomodar el idioma matemático de la época, reemplazando cálculo con infinitesimales por argumentos geométricos equivalentes, los cuales estaban más allá de reproches. Usó los métodos del cálculo para resolver el problema del movimiento planetario, la forma de la superficie de un fluido rotante, y se refirió a lo achatada que es la tierra por los polos, así como a muchos otros problemas, los cuales discutió en Principia Mathematica. En otro trabajo, desarrolló una serie de expansiones para las funciones, incluyendo las potencias fraccionarias e irracionales. Fue claro que Newton entendía los principios de las series de Taylor. No publicó todos estos descubrimientos. En su tiempo los sistemas infinitesimales eran considerados como reprochables.

Gottfried Wilhelm Leibniz fue originalmente acusado de plagiar el trabajo inédito de Isaac Newton, pero es ahora considerado como un inventor independiente y gran desarrollador del cálculo.

Estas ideas fueron sistematizadas en un verdadero cálculo de infinitesimales por Gottfried Wilhelm Leibniz, quien fue originalmente acusado de plagio por Newton. Es ahora reconocido como inventor independiente del cálculo y un gran contribuyente a éste. Su principal contribución fue el proveer un conjunto de reglas claras para la manipulación de cantidades infinitesimales, permitiendo el cómputo de derivadas de segundo orden y de orden superior, y estableciendo la regla del producto y regla de la cadena en su forma diferencial e integral. A diferencia de Newton, Leibniz le puso mucha atención al formalismo y a menudo le dedicaba varios días a determinar los símbolos apropiados para los conceptos.

Usualmente se le acredita a ambos Leibniz y Newton la invención del cálculo. Newton fue el primero en aplicar el cálculo a la física general y Leibniz desarrolló mucho de la notación usada en cálculo hasta al menos principio del siglo XIX. Las ideas principales que ambos Newton y Leibniz estipularon fueron las leyes de diferenciación e integración, las segundas derivadas, las derivadas de orden superior, y la noción de una aproximación de series de polinomios. Ya por la época de Newton, el teorema fundamental de cálculo era conocido.

Cuando Newton y Leibniz primero publicaron sus resultados, hubo gran controversia sobre qué matemático (y por ende qué país) merecía el crédito por la invención de esta disciplina. Newton llegó primero a sus resultados, pero Leibniz publicó primero. Newton acusó a Leibniz de robar sus ideas de sus notas inéditas, las cuales Newton había compartido con unos cuantos miembros de la Royal Society. Esta controversia dividió a los matemáticos de habla inglesa de los matemáticos continentales por varios años, causando un retraso de las matemáticas inglesas. Un cuidadoso examen de los papeles de ambos matemáticos demuestra que ellos llegaron a sus resultados independientemente, con Leibniz empezando primero con la integración y Newton con la diferenciación. Hoy, se les da crédito a ambos matemáticos por desarrollar el cálculo independientemente. Fue Leibniz, sin embargo, quien le dio el nuevo nombre a su disciplina. Newton llamó su cálculo el "método de las fluxiones".

Desde los tiempos de Leibniz y Newton, muchos matemáticos han contribuido al desarrollo continuo del cálculo. En el siglo XIX, el cálculo comenzó a ser planteado más rigurosamente por matemáticos como Cauchy, Riemann y Weierstrass. También fue en este período que las ideas del cálculo fueron generalizadas al espacio euclidiano y al plano complejo. Lebesgue generalizó la noción de la integral de tal manera que virtualmente cualquier función tenga una integral, mientras que Laurent Schwartz extendió la diferenciación casi de la misma manera.

El cálculo es un tema omnipresente en la mayoría de los programas de educación superior y en las universidades. Los matemáticos alrededor del mundo continúan contribuyendo al desarrollo de esta disciplina, la cual ha sido considerada como uno de los logros más grandes del intelecto humano.[11]

Significado y Aplicaciones

Mientras que algunas ideas del cálculo fueron desarrolladas tempranamente en las matemáticas griegas, chinas, indias, islámicas yjaponesas, el uso moderno del cálculo comenzó en Europa, durante el siglo XVII, cuando Isaac Newton y Gottfried Leibniz construyeron con base al trabajo de antiguos matemáticos los principios básicos de esta disciplina. El desarrollo del cálculo fue constituido con base en los conceptos de movimiento instantáneo y el área bajo las curvas.

Las aplicaciones del cálculo diferencial incluyen cómputos que involucran velocidad, aceleración, la pendiente de una curva y optimización. Las aplicaciones del cálculo integral están en cómputos que incluyen elementos de área, volumen, centro de masa, longitud de arco, trabajo ypresión. Aplicaciones más avanzadas incluyen series de potencias y series de Fourier. El cálculo puede ser usado para computar la trayectoria de una nave acoplándose a una estación espacial o la cantidad de nieve en una calzada para coches.

El cálculo es también usado para obtener un entendimiento más preciso de la naturaleza del espacio, el tiempo y del movimiento. Por siglos, matemáticos y filósofos lucharon con paradojas que involucraban la división por cero o sumas de series infinitas de números. Estas preguntas surgen en el estudio del y el movimiento y área. El antiguo filósofo griego Zenón dio varios ejemplos famosos de tales paradojas. El cálculo provee herramientas que pueden resolver tales paradojas, especialmente los límites y las series infinitas.

Fundamentos

En matemáticas, los fundamentos se refiere al desarrollo riguroso de un tema desde axiomas y definiciones precisas. El obtener un fundamento riguroso para el cálculo ocupó a los matemáticos por la mayor parte del siglo que siguió a Leibniz y Newton y todavía es un área activa en la actualidad.

Existe más de una aproximación rigurosa para los fundamentos del cálculo. El más usual hoy en día es el concepto de límite definido en la continuidad de los números reales. Una alternativa es el análisis no estándar, en el cual el sistema de números reales es aumentado coninfinitesimales y números infinitos, como en la concepción original de Newton y Leibnitz. Los fundamentos del cálculo son incluidos en el campo del análisis real, el cual contiene las definiciones completas y pruebas matemáticas de los teoremas del cálculo, así como también generalizaciones tales como la teoría de la medida y la teoría de distribuciones.

Principios

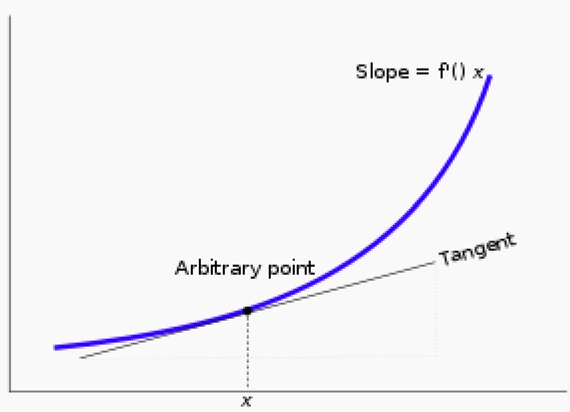
Límites e infinitesimales

Artículos principales: Límite matemático y Infinitesimal

El cálculo es usualmente desarrollado mediante la manipulación de "cantidades pequeñas". Históricamente, el primer método para lograr eso se basaba en infinitesimales. Éstos son objetos que pueden ser tratados como números pero que son, en algún sentido, "infinitamente pequeños". Tratándose de números, éstos serían puntos que no son cero, pero que tienen una distancia cero del número 'cero'. Desde este punto de vista, el cálculo es una colección de técnicas para manipular infinitesimales. Este punto de vista perdió terreno en el siglo XIX porque era difícil lograr una noción precisa del infinitesimal. El concepto cobró fuerza nuevamente en el siglo XX con la introducción del análisis no estándar y del "análisis infinitesimal suave" (del inglés *smooth infinitesimal analysis*) , los que proporcionaron fundamentos sólidos para la manipulación de infinitesimales.

En el siglo XIX, los infinitesimales fueron reemplazados por los límites. Los límites describen el valor de una función en un cierto valor de entrada en términos de sus valores en un punto cercano. Capturan el comportamiento a pequeña escala, como los infinitesimales, pero usan el sistema ordinario de los números reales. En este contexto, el cálculo es una colección de técnicas usadas para la manipulación de ciertos límites. Los infinitesimales son reemplazados por números muy pequeños y el comportamiento infinitamente pequeño de la función es encontrado mediante el comportamiento límite para números cada vez más pequeños. Los límites son fácil de poner en fundamentos, y por esta razón son usualmente considerados como el acercamiento estándar al cálculo.

Cálculo diferencial



Línea tangente en (x, $f(x)$). La derivada $f'(x)$ de una curva en un punto es la pendiente de la línea tangente a esa curva en ese punto.

Artículos principales: Cálculo diferencial y Derivada

El cálculo diferencial es el estudio de la definición, propiedades, y aplicaciones de laderivada de una función, o lo que es lo mismo, la pendiente de la tangente a lo largo de su gráfica. El proceso de encontrar la derivada se llama *derivación* o*diferenciación*. Dada una función y un punto en su dominio, la derivada en ese punto es una forma de codificar el comportamiento a pequeña-escala de la función cerca del punto. Encontrando la derivada de una función para cada punto en su dominio, es posible producir una nueva función, llamada la "función derivada" o simplemente la "derivada" de la función original. En lenguaje técnico, la derivada es un operador lineal, el cual toma una función y devuelve una segunda función, de manera que para cada punto de la primera función, la segunda obtiene la pendiente a la tangente en ese punto.

El concepto de derivada es fundamentalmente más avanzado que los conceptos encontrados en el álgebra.

Para entender la derivada, los estudiantes deben aprender la notación matemática. En notación matemática, un símbolo común para la derivada de una función es una marca parecida a un acento o apostrofo llamada símbolo primo. Así la derivada de *f* es *f′* (pronunciado "f prima"). En lo siguiente la segunda función es la derivada de la primera:

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x.$$

Si la entrada de la función representa el tiempo, entonces la derivada representa el cambio con respecto del tiempo. Por ejemplo, si "f" es una función que toma el tiempo como entrada y da la posición de la pelota en ese momento como salida, entonces la derivada de "f" es cuánto la posición está cambiando en el tiempo, esto es, es la velocidad de la pelota.

Si la función es lineal (esto es, la gráfica de la función es una línea recta), entonces la función puede ser escrita de la forma $y = mx + b$, donde:

$$m = \frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cálculo integral

Artículo principal: Cálculo integral

El **cálculo integral** es el estudio de las definiciones, propiedades, y aplicaciones de dos conceptos relacionados, la *integral indefinida* y la*integral definida*. El proceso de encontrar el valor de una integral es llamado *integración*. En lenguaje técnico, el cálculo integral estudia dos operadores lineales relacionados.

La **integral indefinida** es la *antiderivada*, es decir, la operación inversa de la derivada. La función *F* es una integral indefinida de la función *f*cuando *f* es una derivada de *F*. (El uso de mayúsculas y minúsculas para distinguir entre la función y su integral indefinida es común en el cálculo).

La **integral definida** es un algoritmo que transforma funciones en números, los cuales dan el área entre una curva de un gráfico y el eje-x. La definición técnica de la integral definida es el límite de una suma de áreas de rectángulos, llamada suma de Riemann.

Teorema fundamental

Artículo principal: Teorema fundamental del cálculo

El **teorema fundamental del cálculo** establece que la diferenciación y la integración son operaciones inversas. Más precisamente, relaciona los valores de las antiderivadas para definir las integrales. Ya que es normalmente más fácil computar una antiderivada que aplicar la definición de una integral definida, el teorema fundamental del cálculo provee una forma práctica de computar integrales definidas. También puede ser interpretado como una declaración precisa del hecho de que la diferenciación es la inversa de la integración.

El teorema fundamental del cálculo establece: Si una función *f* es continua en el intervalo [*a*, *b*] y si *F* es una función cuya derivada es *f* en el intervalo (*a*, *b*), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Así entonces, para cada *x* en el intervalo (*a*, *b*), es cierto que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Este hecho, descubierto tanto por Newton como Leibniz, quienes basaron sus resultados en el trabajo previo de Isaac Barrow, fue clave para la masiva proliferación de resultados analíticos luego que su trabajo fuese conocido. El teorema fundamental provee un método algebraico para calcular muchas integrales definidas – sin realizar el proceso de cálculo de límites – mediante el encuentro de fórmulas apropiadas para lasantiderivadas. Las ecuaciones diferenciales relacionan a una función a sus derivadas, y son omnipresentes en las ciencias.

Aplicaciones

La Espiral logarítmica de la concha del Nautilus es una clásica imagen usada para representar el crecimiento y cambio relacionados con el cálculo.

El cálculo es usado en cada rama de las ciencias físicas y de informática, estadística, ingeniería,economía, negocios, medicina, demografía y en otras áreas donde un problema pueda sermodelado matemáticamente y una solución óptima sea deseada.

La física hace un particular uso del cálculo; todos los conceptos en la mecánica clásica están interrelacionado a través del cálculo. La masa de un objeto de conocida densidad, el momento de inercia de los objetos, así como la energía total de un objeto dentro de un campo conservativo pueden ser encontrados por el uso del cálculo. En los sub-campos de electricidad y magnetismo, el cálculo puede ser usado para encontrar el flujo total de los campos electromagnéticos.

Un ejemplo más histórico del uso del cálculo en la física son las leyes del movimiento de newton, donde se usa expresamente el término “tasa de cambio” el cual se hace referencia a la derivada: “La tasa de cambio de momentum de un cuerpo es igual a la fuerza resultante actuando en el cuerpo y está también en la misma dirección”. Incluso la expresión común de la segunda ley de newton como Fuerza = Masa x Aceleración involucra el cálculo diferencial porque la aceleraciónpuede ser expresada como la derivada de la velocidad. La ecuaciones de Maxwell en su teoría de electromagnetismo y la Teoría de la relatividad general de Einstein están también expresadas en el lenguaje del cálculo diferencial.

La química también usa el cálculo para determinar los ritmos de las reacciones y el decaimiento radioactivo.

El cálculo también puede ser usado en conjunto con otras disciplinas matemáticas. Por ejemplo, puede ser usado con el álgebra lineal para encontrar la mejor aproximación lineal para un conjunto de puntos en un dominio. También puede ser usado en la teoría de la probabilidad para determinar la probabilidad de una variable continúa al azar desde una densidad de función asumida.

El teorema de Green, el cual establece la relación entre una integral lineal alrededor una simple curva cerrada C y una doble integral sobre el plano de región D delimitada por C, es aplicado en un instrumento conocido como planímetro, el cual es usado para calcular el área de una superficie plana en un dibujo. Por ejemplo, puede ser usado para calcular la cantidad de área que toma una piscina cuando se bosqueja el diseño de un pedazo de propiedad.

En la medicina, el cálculo puede ser usado para encontrar el ángulo de ramificación óptimo de vaso sanguíneo para maximizar el flujo.

En geometría analítica, el estudio de los gráficos de funciones, el cálculo es usado para encontrar puntos máximos y mínimos, la tangente, así también como para determinar la concavidad y los puntos de inflexión.

En economía, el cálculo permite determinar el beneficio máximo por medio del costo marginal y del ingreso marginal.

El cálculo también puede ser usado para encontrar soluciones aproximadas para ecuaciones, usando métodos como por ejemplo el método de Newton, la iteración de punto fijo y la aproximación lineal. Por ejemplo, las naves espaciales usan una variación del método de Euler para aproximar trayectorias curvas dentro de entornos de gravedad cero.

Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_infinitesimal