

TEORÍA DE CONJUNTOS

CONJUNTOS Y TÉCNICAS DE CONTEO

DEFINICIÓN Y NOTACIÓN DE CONJUNTOS

El término *conjunto* juega un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas modernas; Además de proporcionar las bases para comprender con mayor claridad algunos aspectos de la teoría de la probabilidad. Su origen se debe al matemático alemán George Cantor (1845 – 1918).

Podemos definir de manera intuitiva a un conjunto, como una colección o listado de objetos con características bien definidas que lo hace pertenecer a un grupo determinado.

Para que exista un conjunto debe basarse en lo siguiente:

-  La colección de elementos debe estar bien definida.
-  Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez, generalmente, estos elementos deben ser diferentes, si uno de ellos se repite se contará sólo una vez.
-  El orden en que se enumeran los elementos que carecen de importancia.

NOTACIÓN

A los conjuntos se les representa con letras mayúsculas **A**, **B**, **C**, ... y a los elementos con letras minúsculas **a**, **b**, **c**, ..., por ejemplo, el conjunto **A** cuyos elementos son los números en el lanzamiento de un dado.

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

En base a la cantidad de elementos que tenga un conjunto, estos se pueden clasificar en conjuntos finitos e infinitos.

FINITOS: Tienen un número conocido de elementos, es decir, se encuentran determinados por su longitud o cantidad.

El conjunto de días de la semana

INFINITOS: Son aquellos en los cuales no podemos determinar su longitud.

El conjunto de los números reales

Existen dos formas comunes de expresar un conjunto y la selección de una forma particular de expresión depende de la conveniencia y de ciertas circunstancias siendo:

EXTENSIÓN: Cuando se describe a cada uno de los elementos.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

COMPRESIÓN: Cuando se enuncian las propiedades que deben tener sus elementos.

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$$

Para describir si un elemento pertenece o no a un conjunto, se utiliza el símbolo de pertenencia o es elemento de, con el símbolo \in , en caso contrario \notin .

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$2 \in A; 5 \notin A$$

TIPOS DE CONJUNTOS

CONJUNTO VACÍO O NULO: Es aquel que no tiene elementos y se simboliza por \emptyset o $\{\}$.

$$A = \{x^2 + 1 = 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

El conjunto **A**, es un conjunto vacío por que no hay ningún número real que satisfaga a $x^2 + 1 = 0$

CONJUNTO UNIVERSAL: Es el conjunto de todos los elementos considerados en una población o universo, en un problema en especial. No es único, depende de la situación, denotado por **U** o Ω .

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Considerando el conjunto **A** y el conjunto **B**, si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a **A** también pertenece a **B** y si cada elemento que pertenece a **B** pertenece también a **A**.

$$A = B$$

SUBCONJUNTO

Si todo elemento de un conjunto **A** es también elemento de un conjunto **B**, entonces se dice que **A** es un subconjunto de **B**. Representado por el símbolo \subset .

$$A \subset B \text{ o } B \supset A$$

SUBCONJUNTOS PROPIOS

Se dice que es un subconjunto propio de **A** si todos los elementos de un conjunto **B** se encuentran incluidos en él **A**, denotado por \subsetneq .

$$A \subsetneq B \text{ o } B \supsetneq A$$

CONJUNTO POTENCIA

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto se llama conjunto potencia. Si un conjunto es finito con n elementos, entonces el conjunto potencia tendrá 2^n subconjuntos.

$$A = \{1, 2\}$$

El total de subconjuntos es:

$$2^2 = 4$$

$$\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \{\}$$

CONJUNTOS DISJUNTOS

Son aquellos que no tienen elementos en común, es decir, cuando no existen elementos que pertenezcan a ambos.

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$G = \{a, b, c, d, e, f\}$$

PARTICIÓN

Cuando un conjunto es dividido en subconjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos, se le denomina partición.

OPERACIONES DE CONJUNTOS

-  Unión.
-  Intersección.
-  Diferencia.
-  Complemento.
-  Producto cartesiano.

UNIÓN DE CONJUNTOS. Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera del conjunto universal. La unión de A y B , expresada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera del conjunto universal. La intersección de A y B , expresada por $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B simultáneamente, es decir:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS O COMPLEMENTO RELATIVO. Sean **A** y **B** dos conjuntos cualesquiera del conjunto universal. La diferencia o complemento relativo de **B** con respecto a **A**, es el conjunto de los elementos que pertenecen a **A**, pero no pertenecen a **B**.

$$\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}}$$

Nota: $\mathbf{A - B \neq B - A}$

COMPLEMENTO ABSOLUTO O SIMPLEMENTE COMPLEMENTO. Sea **A** un subconjunto cualesquiera del conjunto universal. El complemento de **A** es el conjunto de elementos que perteneciendo al universo y no pertenecen al conjunto **A**, denotado por $\mathbf{A'}$ o $\mathbf{A^c}$.

$$\mathbf{A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}}$$

Nota: $\mathbf{A' = U - A}$

PRODUCTO CARTESIANO. Sean **A** y **B** dos conjuntos, el conjunto producto o producto cartesiano expresado por $\mathbf{A \times B}$ está formado por las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in \mathbf{A}$ y $b \in \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}}$$

LEYES DE CONJUNTOS

DE IDEMPOTENCIA

$$\mathbf{A \cup A = A} \quad \mathbf{A \cap A = A}$$

ASOCIATIVA

$$\mathbf{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$$

$$\mathbf{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$$

CONMUTATIVA

$$\mathbf{A \cup B = B \cup A} \quad \mathbf{A \cap B = B \cap A}$$

DISTRIBUTIVA

$$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

$$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

DE IDENTIDAD

$$\mathbf{A \cup U = U} \quad \mathbf{A \cap U = A}$$

$$\mathbf{A \cup \emptyset = A} \quad \mathbf{A \cap \emptyset = \emptyset}$$

DE INVOLUCIÓN

$$\mathbf{(A')' = A}$$

DE COMPLEMENTO

$$\begin{aligned} \mathbf{A \cup A' = U} & & \mathbf{A \cap A' = \emptyset} \\ \mathbf{U' = \emptyset} & & \mathbf{\emptyset' = U} \end{aligned}$$

D'MORGAN

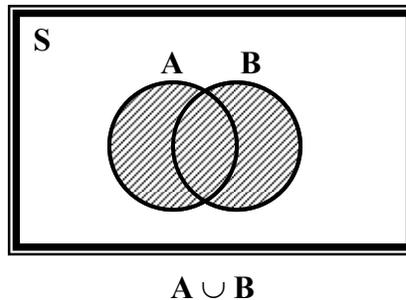
$$\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'} \quad \mathbf{(A \cap B)' = A' \cup B'}$$

PRINCIPIO DE CONTEO

$$\begin{aligned} \mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B)} & & \mathbf{A \cap B = \emptyset} \\ \mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} & & \mathbf{A \cap B \neq \emptyset} \end{aligned}$$

DIAGRAMAS DE VENN

Un diagrama de Venn es una representación pictórica de conjuntos en el plano. El conjunto universal U se representa por un rectángulo, cualquier otro conjunto se representa con un círculo. Una operación se representa mediante el sombreado de los elementos del conjunto.

**EVENTOS**

EXPERIMENTO ESTADÍSTICO: Es el proceso mediante el cual se genera un conjunto de datos y puede ser determinístico o aleatorio.

ESPACIO MUESTRAL: Son todos los posibles resultados que se obtienen de un experimento denotado por S o Ω .

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

EVENTO SIMPLE: Son los eventos constituidos por un sólo elemento.

$$A = \{4\}$$

EVENTO COMPUESTO: Es cualquier evento que se puede descomponer en dos o más eventos simples.

$$B = \{2, 4, 6\}$$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES: Llamados también *disjuntos*, no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, la ocurrencia de ellos excluye la ocurrencia de los otros.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$

EVENTOS INDEPENDIENTES: Cuando la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no afecte la ocurrencia de otro evento.

EVENTOS DEPENDIENTES: Si los eventos **A** y **B** están relacionados de tal modo que la ocurrencia de **B** depende de la ocurrencia de **A**, entonces **A** y **B** son dependientes.